Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 1993

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 243 (WT=2,00) i 244 (WT=2,78) z numeru 8/1992

Mikołaj Rotkiewicz	– Warszawa	47,40
Marek Prauza	– Poraj	45,98
Marcin Kasperski	– Warszawa	38,26
Jerzy Janowicz	– Bolesławiec	37,80

Witamy w **Klubie 44** pana Mikołaja Rotkiewicza oraz gratulujemy dwunastemu **Weteranowi** matematycznego **Klubu 44**, którym został pan Marek Prauza.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1993.

Zadania z matematyki nr 261, 262

Redaguje Marcin E. KUCZMA

261. Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych x, n spełniające równanie
$$x^n + (x+1)^n = (x+2)^n.$$

262. Czy istnieje na płaszczyźnie zbiór ograniczony wypukły, o niepustym wnętrzu, który można podzielić trzema liniami prostymi na siedem części o równych polach? (Podać przykład lub wykazać, że nie ma takiego zbioru.)

Zadanie **262** zaproponował pan Janusz Olszewski z Suwałk.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/1993

Przypominamy treść zadań:

253. Dane są liczby całkowite $a \geq 1$, $k \geq 0$, $m \geq 3$, przy czym m jest dzielnikiem liczby $a^{2^k} + 1$. Dowieść, że $m > 2^{k+1}$.

254. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające równanie
$$f(x+y) = f(x)f(y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \qquad \text{dla} \quad x, y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

253. Liczby a oraz m są względnie pierwsze. Stąd w szczególności wynika, że reszta z dzielenia każdej z liczb
$$a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ \ldots,\ a^{2^{k+1}}$$
przez m jest różna od zera. Przypuśćmy, wbrew tezie, że $m \leq 2^{k+1}$. W wypisanym wyżej ciągu znajdą się wówczas co najmniej dwie liczby dające jednakowe reszty przy dzieleniu przez m:
$$\exists\, r, s: \quad 1 \leq r < s \leq 2^{k+1}, \qquad a^r \equiv a^s \pmod{m}.$$
Skoro $\mathrm{NWD}(a, m) = 1$, wnosimy stąd, że $a^{s-r} \equiv 1 \pmod{m}$. Zapiszmy różnicę $s - r$ w postaci $s - r = 2^\alpha q$, $0 \leq \alpha \leq k$, q nieparzyste. Skoro, z założenia, $a^{2^k} \equiv -1 \pmod{m}$, zatem
$$1 = 1^{2^{k-\alpha}} \equiv \left(a^{s-r}\right)^{2^{k-\alpha}} = \left(a^{2^\alpha q}\right)^{2^{k-\alpha}} =$$
$$= a^{2^k q} = \left(a^{2^k}\right)^q \equiv (-1)^q = -1 \qquad \pmod{m},$$
wbrew temu, że $m \geq 3$. Sprzeczność kończy dowód.

254. Załóżmy, że funkcja f spełnia podane równanie funkcyjne i przyjmijmy
$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \qquad \text{dla} \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$
Równanie przybiera postać
$$(x+y)g(x+y) = xg(x) \cdot yg(y) \cdot \frac{x+y}{xy} \quad \text{dla} \quad x, y, x+y \in \mathbf{R} \setminus \{0\},$$
czyli
$$(1) \qquad g(x+y) = g(x)g(y) \qquad \text{dla} \quad x, y, x+y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$
Przypuśćmy, że $g(x_0) = 0$ dla pewnego $x_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Kładąc w (1) $x = x_0$, $y = t - x_0$ (gdzie t jest dowolną liczbą różną od 0 i od x_0) otrzymujemy $g(t) = 0$; z dowolności wyboru t wnosimy, że g jest funkcją tożsamościowo równą zeru w $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

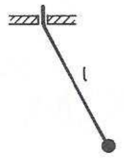
Przyjmijmy teraz, że $g(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Kładąc w (1) $x = y = t/2$ (gdzie t jest dowolną liczbą różną od 0) dostajemy
$$(2) \qquad g(t) = \big(g(t/2)\big)^2 > 0 \qquad \text{dla} \quad t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$
Wykażemy, że
$$(3) \qquad \lim_{x \to 0} g(x) = 1.$$
Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem liczb różnych od zera, zbieżnym do zera. Na mocy równania (1) (z $x = x_n$, $y = 1$) mamy
$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{g(x_n + 1)}{g(1)} = \frac{g(1)}{g(1)} = 1,$$
co dowodzi słuszności związku (3). Zatem nadając funkcji g wartość $g(0) = 1$ przedłużamy ją do funkcji ciągłej na całym zbiorze liczb rzeczywistych.

Tak rozszerzona funkcja g spełnia równanie (1) także dla par liczb x, y, z których jedna (lub obie) równa się zeru. Pozostaje rozważyć sytuację, gdy $x, y \neq 0$, ale $x + y = 0$. Wówczas
$$g(x)g(y) = g(x)g(-x) = \lim_{n\to\infty} g\left(x + \tfrac{1}{n}\right)g(-x) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} g\left(\left(x + \tfrac{1}{n}\right) + (-x)\right) = \lim_{n\to\infty} g\left(\tfrac{1}{n}\right) = g(0) = g(x+y).$$
Tak więc
$$g(x+y) = g(x)g(y) \qquad \text{dla wszystkich} \quad x, y \in \mathbf{R}.$$
Zatem funkcja ciągła $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dana wzorem $h(x) = \ln g(x)$ (określona poprawnie, dzięki nierówności (2)) spełnia równanie
$$h(x+y) = h(x) + h(y) \qquad \text{dla} \quad x, y \in \mathbf{R}.$$
Wiadomo, że każda taka funkcja ma postać $h(x) = cx$, gdzie c jest pewną stałą. W takim razie $g(x) = e^{cx} = a^x$ (gdzie $a = e^c > 0$), bądź też $g(x)$ równa się tożsamościowo zeru (przypadek rozpatrzony wcześniej).

Wobec tego funkcja f ma postać
$$f(x) = 0 \qquad \text{lub} \qquad f(x) = xa^x$$
(w zbiorze $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, więc też – przez ciągłość – w zbiorze $\mathbf{R}$); a może być dowolną stałą dodatnią. Sprawdzenie, że każda funkcja takiej postaci spełnia wyjściowe równanie, jest natychmiastowe.

Zadania z fizyki nr 159, 160

Redaguje Jerzy B. BROJAN



159. Małe ciało zawieszono na nici, która może być wciągana przez mały otworek (rys.) i wprawiono w ruch drgający o amplitudzie kątowej α_0; swobodna długość nici wynosiła wtedy l_0. Następnie wciągnięto nić bardzo powolnym ruchem jednostajnym tak, że długość swobodna zmalała do l_1. Jak wyraża się przez dane wielkości końcowa amplituda kątowa α_1? Założyć, że obie amplitudy kątowe są małe.

160. W okolicach niezelektryfikowanych używa się czasem lodówek działających dzięki spalaniu ropy (lub innego paliwa). Ocenić ilość ropy, którą trzeba spalić, aby zamrozić 1 kg wody. Założyć, że lodówka jest idealną maszyną cieplną. Dane: temperatura otoczenia (czyli także temperatura początkowa wody) 25°C, ciepło właściwe wody 4200 J/kg·K, ciepło topnienia lodu $3,3 \cdot 10^5$ J/kg, ciepło spalania ropy 45 MJ/kg, temperatura spalania 1200°C.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 143 (WT=3,80) i 144 (WT=2,40) z numeru 9/1992

Tomasz Wietecha	– Tarnów	28,92
Przemysław Gworys	– Częstochowa	28,13
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	21,02

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/1993

Przypominamy treść zadań:

151. Czy można zwiększyć amplitudę drgań w obwodzie LC:
a) zbliżając i oddalając w odpowiednich momentach okładki kondensatora?
b) wsuwając między okładki i wysuwając płytkę z dielektryka?
c) zbliżając i oddalając zwoje cewki?
d) wsuwając do wnętrza cewki i wysuwając magnes stały?
W jakich momentach trzeba wykonywać opisane wyżej ruchy, aby wzrost amplitudy był największy?

152. Przednia i tylna oś motocykla są odległe o $d = 1,4$ m, promień kół wynosi $r = 0,4$ m, a współczynnik tarcia opon o jezdnię jest równy $f = 1$. Środek masy motocykla wraz z motocyklistą znajduje się w jednakowej odległości od obu osi na wysokości $h = 0,8$ m nad ziemią. Obliczyć minimalną drogę hamowania motocykla jadącego z prędkością początkową $v = 60$ km/h, jeśli
a) używać tylko tylnego hamulca,
b) używać tylko przedniego hamulca,
c) używać obu hamulców.
Przedyskutować wyniki.

151. Zwiększenie amplitudy drgań wymaga dostarczenia energii, które w tym przypadku następuje na drodze pracy mechanicznej. W naładowanym kondensatorze okładki przyciągają się wzajemnie, a dielektryk jest wciągany do środka (inaczej: dla ustalonego ładunku energia kondensatora rośnie przy oddaleniu okładek lub usunięciu dielektryka), zatem oddalać okładki lub wysuwać płytkę należy w tych momentach, gdy ładunek osiąga wartość maksymalną, zbliżać zaś wtedy, gdy ładunek przechodzi przez zero. W cewce zwoje przyciągają się (według prawa oddziaływania prądów), należy więc je oddalać wtedy, gdy prąd jest maksymalny, a zbliżać, gdy przechodzi przez zero. Oddziaływanie między magnesem a cewką może być zarówno przyciągające, jak i odpychające, czyli oba ruchy należy wykonywać przy maksymalnym prądzie: zbliżać przy odpychaniu (jednoimienne bieguny naprzeciw siebie), a oddalać przy przyciąganiu (naprzeciw bieguny różnoimienne). Odnotujmy, że tylko metodą d) można wzbudzić drgania, jeśli początkowo nie występowały w ogóle.

152. Oznaczywszy siły nacisku przedniego i tylnego koła na jezdnię przez N_1 i N_2, a odpowiednie siły tarcia przez T_1 i T_2, mamy równania

$$N_1 + N_2 = mg, \tag{1}$$

$$T_1 + T_2 = ma, \tag{2}$$

$$(T_1 + T_2)h = (N_1 - N_2)\frac{d}{2}, \tag{3}$$

przy czym ostatni wzór wynika stąd, że motocykl jako całość nie obraca się (suma momentów sił względem środka masy równa się zeru). Zauważmy, że promień kół nie ma dla rozwiązania żadnego znaczenia. W przypadku a) podstawiamy $T_1 = 0$, $T_2 = N_2 f$ i rozwiązując układ równań znajdujemy opóźnienie motocykla hamującego tylnym hamulcem

$$a = \frac{fg}{2(1 + fh/d)} = 3,12 \text{ m/s}^2.$$

Gdy posługujemy się przednim hamulcem, podstawienie $T_2 = 0$, $T_1 = N_1 f$ daje wynik

$$a = \frac{fg}{2(1 - fh/d)},$$

przy użyciu zaś obu hamulców otrzymujemy $a = fg$. Należy jednak pamiętać, że użycie przedniego hamulca grozi przewróceniem się motocykla. Formalnie rzecz biorąc, ostatnie dwa wyniki są poprawne tylko wtedy, gdy wyliczona z równań wartość N_2 jest nieujemna. Przegląd dokonywanych przekształceń prowadzi do wniosku, że z warunku $N_2 \geq 0$ wynika $a \leq g\frac{d}{2h}$; dalej widzimy, że obliczone wyżej wartości przyspieszenia w przypadkach b) i c) są prawidłowe tylko wtedy, gdy $\frac{d}{2} \geq fh$. Podstawiając dane liczbowe przekonujemy się, że warunek ten nie jest spełniony, zatem dla obu przypadków b) i c) $a_{max} = g\frac{d}{2h} = 8,58 \text{ m/s}^2$. Widać też, jaka jest bezpieczna metoda hamowania: ponieważ do równań nie wchodzą siły T_1 i T_2 oddzielnie, lecz tylko ich suma, należy więc nacisnąć maksymalnie tylny hamulec, przedni zaś ścisnąć tylko tyle, aby opóźnienie wzrosło do granicznej wartości $g\frac{d}{2h}$.

Drogę hamowania obliczamy ze wzoru $s = v^2/2a$ – przy hamowaniu tylnym hamulcem wynosi ona 44,5 m, a w pozostałych przypadkach 16,2 m.