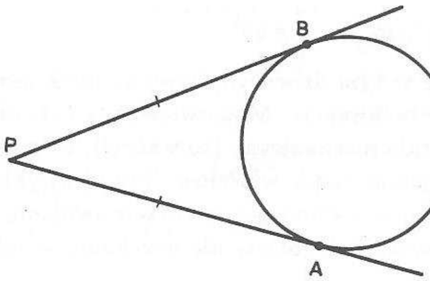
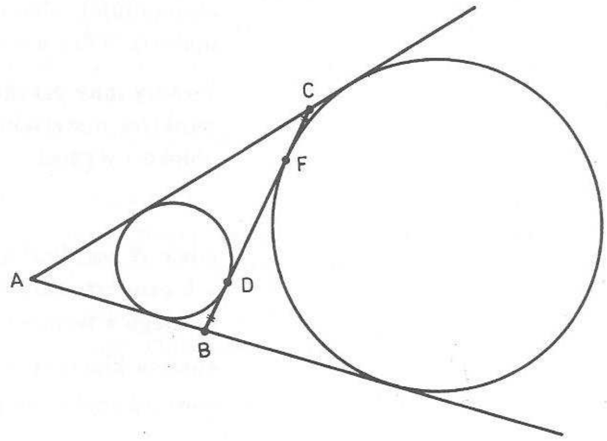
Jak udowodnić wzór Herona?

Przypominamy, wzór Herona ma postać $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie S jest polem trójkąta, a, b, c – długościami boków trójkąta, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.
Na tytułowe pytanie odpowiadamy zazwyczaj odwołując się do odpowiedniej literatury, w której ów dowód to żmudne przekształcenia algebraiczne bądź trygonometryczne.
Czy można więc udowodnić wzór Herona „nie rachując"? Oczywiście, że tak. Zanim jednak przedstawimy taki dowód, przypomnijmy kilka prostych faktów z elementarnej geometrii (Czytelnik, który po raz pierwszy styka się z tymi faktami, bez trudu je udowodni).

Fakt 1. Dwie różne styczne poprowadzone do danego okręgu z punktu P, leżącego na zewnątrz tego okręgu, są równej długości: tj. $PA = PB$. (Fakt ten nazywany jest Najmocniejszym Twierdzeniem Geometrii. Niżej Czytelnik znajdzie wiele przykładów na to, jak trafnie nazwa ta została nadana.)



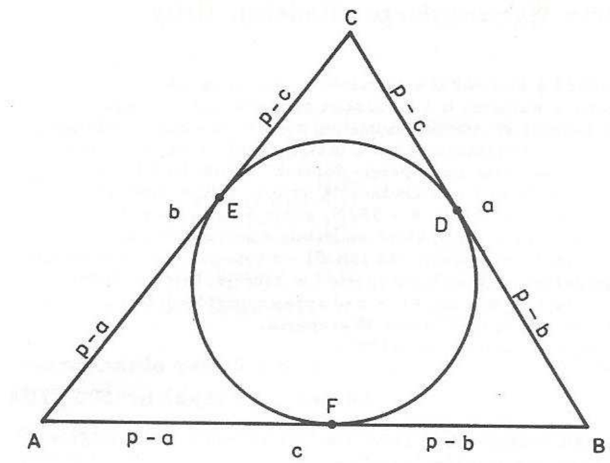
Fakt 2. Okręgi: wpisany w trójkąt ABC i dopisany do trójkąta ABC (styczny do boku BC i do przedłużeń boków AB i AC) są styczne do boku BC odpowiednio w punktach D i F. Wówczas $CF = BD$.



Fakt 3. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, AC, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Niech $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Wówczas

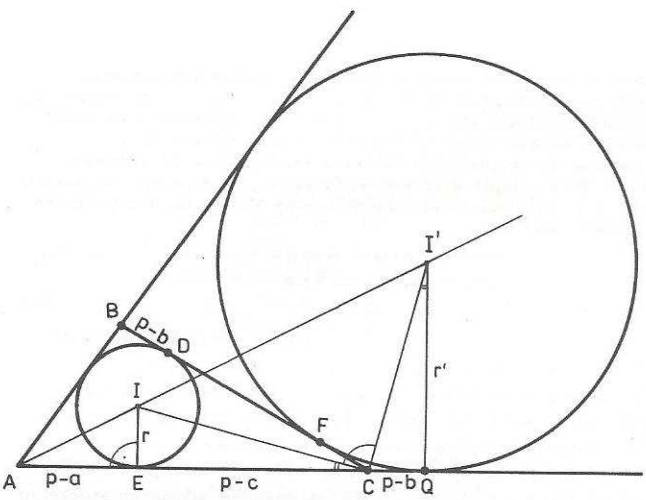
$$AE = AF = p - a,$$
$$BF = BD = p - b,$$
$$CE = CD = p - c.$$

(Patrz rysunek na następnej stronie.)



Fakt 4. Niech S, p, r oznaczają odpowiednio pole, połowę obwodu, promień koła wpisanego w dany trójkąt. Wówczas $S = pr$.

A oto obiecany dowód wzoru Herona (podał go Sidney H. Kung).



Rozpatrzmy trójkąt ABC o bokach $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ i wpisany weń okrąg o środku I i promieniu r. Niech I' będzie środkiem okręgu stycznego do boku BC i do przedłużeń boków AB i AC, r' zaś – jego promieniem. Niech p będzie połową obwodu trójkąta ABC (tj. $p = \dfrac{a+b+c}{2}$), a S – jego polem. Na mocy faktu 3, $AE = p - a$ i $CE = p - c$. Ponadto $CQ = CF = BD = p - b$ (fakty 1, 2, 3) i $AQ = AE + EC + CQ = p - a + p - c + p - b = p$. Zatem z podobieństwa trójkątów AEI i AQI' mamy:

$$(*) \qquad \frac{EI}{AE} = \frac{I'Q}{AQ}, \quad \text{czyli} \quad \frac{r}{p-a} = \frac{r'}{p}.$$

Nietrudno zauważyć, że $\angle ECI = \angle ICD$ oraz $\angle FCI' = \angle I'CQ$. Stąd dostajemy, że $\angle ICI' = 90°$. Tak więc $\angle ECI = 180° - 90° - \angle I'CQ = 90° - (90° - \angle CI'Q) = \angle CI'Q$, co znaczy, że trójkąty IEC i CQI' są podobne.

Zatem

$$(**) \qquad \frac{EI}{EC} = \frac{CQ}{QI'}, \quad \text{czyli} \quad \frac{r}{p-c} = \frac{p-b}{r'}.$$

Mnożąc stronami proporcje (*) i (**) dostajemy

$$\frac{r^2}{(p-a)(p-c)} = \frac{p-b}{p},$$

skąd

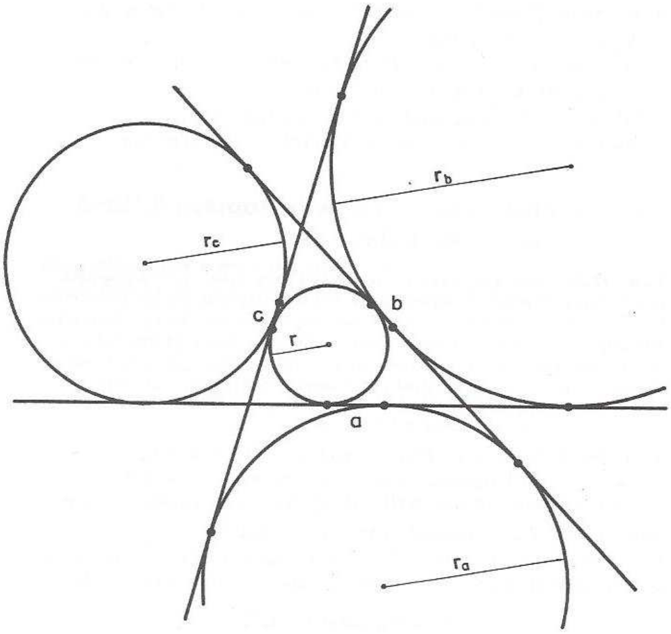
$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Po pomnożeniu stronami powyższej równości przez p i skorzystaniu z faktu 4 otrzymujemy wzór Herona

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Na koniec zadanie dla Czytelnika.

Niech a, b, c będą bokami trójkąta, r_a, r_b, r_c promieniami okręgów dopisanych do tego trójkąta, stycznych odpowiednio do boków a, b, c, natomiast r – promieniem okręgu wpisanego.



Czytelnik zechce się zastanowić, jak „nie rachując":

1) wyprowadzić wzory na r_a, r_b, r_c (w zależności od a, b, c),

2) udowodnić, że: (jak zawsze S oznacza pole, a p – połowę obwodu)

a) $S = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c)$,

b) $rr_a = (p-b)(p-c)$,

c) $r_b r_c = p(p-a)$,

d) $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2$,

e) $S = \sqrt{r r_a r_b r_c}$,

f) $S = a\dfrac{r_b r_c}{r_b + r_c} = b\dfrac{r_a r_c}{r_a + r_c} = c\dfrac{r_a r_b}{r_a + r_b}$,

g) $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$.

Zauważmy, że zestawiając b), c) i e) otrzymujemy wzór Herona.

Waldemar POMPE