Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.**
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1994.

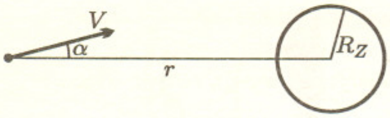
Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 165 (WT=1,40) i 166 (WT=3,70)
z numeru 10/1993

Przemysław Gworys	– Częstochowa	42,14
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	34,04
Andrzej Borowski	– Aleksandr. Kuj.	27,03

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Uwaga:

Zadanie **174** zostało wydrukowane w numerze 2/1994 z błędem: pominięto dane dotyczące wartości i kierunku prędkości początkowej planetoidy. Oto prawidłowa treść:



174. Planetoida o masie $m = 50$ ton znajduje się w odległości $r = 100$ tys. km od środka Ziemi i leci z prędkością $v = 3$ km/s pod kątem $\alpha = 10°$ do kierunku Ziemi (rys.). Czy planetoida minie Ziemię, czy rozbije się o jej powierzchnię? Czy porusza się po torze eliptycznym, parabolicznym czy hiperbolicznym? Promień Ziemi jest równy 6370 km.

Termin przysyłania rozwiązań tego zadania zostaje przedłużony do 31 sierpnia br., a zaliczenie punktów za oba zadania **173** i **174** nastąpi łącznie (zatem z opóźnieniem). Przepraszamy! W związku z powyższym w tym numerze dajemy rozwiązanie tylko jednego zadania.

Rozwiązanie zadania z fizyki z numeru 2/1994

Przypominamy treść zadania:

173. Porcję mięsa o temperaturze +5°C włożono do zamrażalnika, w którym temperatura wynosi −18°C, a jednocześnie taką samą porcję mięsa o temperaturze −18°C przełożono z zamrażalnika do komory lodówki (gdzie temperatura wynosi +5°C). Niech t_1 oznacza czas, po którym pierwsza porcja osiągnie temperaturę −15°C, a t_2 – czas, po którym druga porcja osiągnie temperaturę +2°C. Który z tych czasów jest dłuższy i ile razy?

173. Mięso składa się głównie z wody, a duże ciepło właściwe wody i duże ciepło topnienia usprawiedliwiają pominięcie innych składników. Obliczmy – na przykład – czas oziębiania porcji od +5° C do 0°C przy temperaturze otoczenia −18°C. Przyjmujemy, że tempo przepływu ciepła jest proporcjonalne do różnicy temperatur, a oznaczywszy stałą proporcjonalności przez α mamy równanie różniczkowe

$$\alpha(T+18)dt = -mcdT\,,$$

gdzie T – temperatura w skali Celsjusza, t – czas, c – ciepło właściwe. Całkując otrzymujemy

$$t = \frac{mc}{\alpha}\ln\left(\frac{23}{18}\right)\,.$$

Obliczenie czasu zamarzania nie wymaga całkowania – wynikiem jest $t' = \dfrac{1}{18}\dfrac{mq}{\alpha}$ (q – ciepło topnienia). Należy jeszcze dodać czas oziębiania do −15°C i powtórzyć rachunki dla drugiej porcji. Ostatecznie

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{c_l\ln\left(\frac{23}{5}\right) + \frac{q}{5} + c_w\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{c_w\ln\left(\frac{23}{18}\right) + \frac{q}{18} + c_l\ln\left(\frac{18}{3}\right)}\,,$$

gdzie c_w – ciepło właściwe wody, c_l – lodu. Podstawienie danych liczbowych daje rezultat $t_2/t_1 \approx 3{,}09$. Warto zauważyć, że zarówno w liczniku, jak i w mianowniku środkowy wyraz przeważa (najdłużej trwa zamarzanie lub rozmarzanie), czyli dość dobrym przybliżeniem jest $t_2/t_1 \approx 18/5 = 3{,}6$.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/1994

Przypominamy treść zadań:

275. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ spełniające warunki
$$f(f(f(x))) = f(x) \geq 0 \qquad \text{dla wszystkich} \quad x \in \mathbf{R}.$$

276. Cięciwy AC i BD okręgu o środku O przecinają się w punkcie P. Okręgi opisane na trójkątach PAB i PCD przecinają się w punktach P oraz Q. Zakładamy, że O, P, Q są trzema różnymi punktami. Dowieść, że kąt OQP jest prosty.

275. Przypuśćmy, że funkcja f, nie będąca stałą, spełnia podane warunki. Oznaczmy kres dolny i kres górny funkcji f na zbiorze $\mathbf{R}$ odpowiednio przez a i b; tak więc $0 \leq a < b \leq \infty$. Zbiór wszystkich wartości przyjmowanych przez f jest przedziałem (otwartym lub domkniętym lub jednostronnie domkniętym) o końcach a, b; oznaczmy ten zbiór przez J. Podane równanie funkcyjne możemy zapisać w postaci

(1) $$f(f(x)) = x \qquad \text{dla} \quad x \in J,$$

z której wynika, że funkcja f, zawężona do przedziału J, przekształca ten przedział na siebie w sposób wzajemnie jednoznaczny. Jest więc na nim ściśle monotoniczna.

Gdyby dla wszystkich $x \in J$ zachodziła równość $f(x) = x$, wówczas mielibyśmy
$$a = \lim_{x\to a+} f(x) = f(a) \in J, \qquad f'_+(a) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 1$$
i wobec założenia różniczkowalności pochodna $f'(a)$ byłaby równa 1. Funkcja f przyjmowałaby więc w lewostronnym otoczeniu punktu a wartości mniejsze od a, wbrew określeniu $a = \inf\limits_{x\in\mathbf{R}} f(x)$. Wobec tego istnieje $x_1 \in J$ takie, że $x_2 = f(x_1) \neq x_1$. Stąd, wobec (1), $f(x_2) = x_1$. Bez straty ogólności można przyjąć, że $x_1 < x_2$; wówczas $f(x_1) > f(x_2)$, co oznacza, że f nie jest na przedziale J funkcją rosnącą. Jest zatem funkcją malejącą – na przedziale J, więc (wobec ciągłości) także na jego domknięciu. Stąd $f(a) = \sup\limits_{x\in J} f(x)$. A skoro f odwzorowuje J na J, to zachodzi równość
$$b = \sup J = \sup_{x\in J} f(x) = f(a) < \infty\,,$$
wobec czego $b \in J$. Stąd
$$f(b) = \inf_{x\in J} f(x) = \inf J = a\,,$$
wobec czego $a \in J$.

Tak więc J jest przedziałem domkniętym $\langle a; b\rangle$; $f(a) = b$, $f(b) = a$. Funkcja f osiąga w punktach a i b swoje wartości ekstremalne (na $\mathbf{R}$) i w konsekwencji

(2) $$f'(a) = 0, \qquad f'(b) = 0.$$

Niech l będzie prostą przechodzącą przez punkty płaszczyzny (a, b) i (b, a). Dla x z prawostronnego otoczenia a punkty $(x, f(x))$ wykresu funkcji f leżą powyżej prostej l; zaś dla x z lewostronnego otoczenia b punkty $(x, f(x))$ leżą poniżej l; wynika to z równości (2). Z drugiej strony, równanie (1) pokazuje, że funkcja f (zawężona do przedziału J) jest funkcją odwrotną do siebie samej, a więc jej wykres jest symetryczny względem prostej $y = x$. Te dwie konkluzje wzajemnie się wykluczają.

Otrzymana sprzeczność jest wynikiem przypuszczenia, że f nie jest funkcją stałą. Stąd odpowiedź: jedynymi funkcjami spełniającymi warunki zadania są nieujemne stałe.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 265 (WT=2,11) i 266 (WT=2,41)
z numeru 9/1993

Leszek Gasiński	– Stalowa Wola	43,96
Jan Ciach	– Ostrowiec Św.	43,65
Mirosław Matląga	– Skoczów	39,44
Tomasz Kulpa	– Katowice	38,94
Jan Kraszewski	– Legnica	37,66
Krzysztof Jedziniak	– Katowice	35,57

276. Okręgi opisane na trójkątach PAB i PCD oznaczmy odpowiednio przez ω_1 i ω_2; okrąg przechodzący przez punkty A, B, C, D oznaczmy przez Ω. Pełne rozwiązanie zadania wymaga rozpatrzenia następujących sytuacji:

(1) rozważane punkty mogą leżeć na okręgach ω_1 oraz ω_2 odpowiednio:

(1.1) w porządku P, Q, A, B oraz w porządku P, Q, D, C;

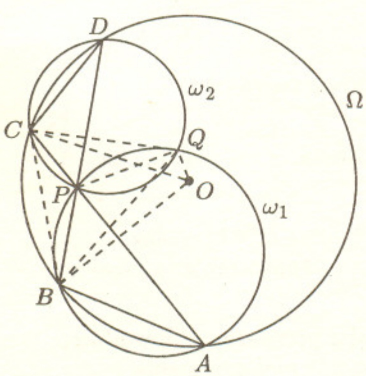
(1.2) w porządku P, Q, B, A oraz w porządku P, Q, C, D;

(2) środek O okręgu Ω może leżeć:

(2.1) po tej stronie prostej PQ, co punkty A i B;

(2.2) po tej stronie prostej PQ, co punkty C i D.

Każdy z tych podziałów na przypadki jest niezależny od drugiego. Mamy więc cztery możliwe konfiguracje:
$$(1.1)\wedge(2.1), \quad (1.1)\wedge(2.2), \quad (1.2)\wedge(2.1), \quad (1.2)\wedge(2.2).$$
Przyjmijmy pierwszą możliwość. [Gdy zachodzi druga, trzecia lub czwarta sytuacja, możemy ją sprowadzić do pierwszej stosując – odpowiednio – zamianę ról punktów:
$$(A \leftrightarrow D,\ B \leftrightarrow C), \quad (A \leftrightarrow B,\ C \leftrightarrow D), \quad (A \leftrightarrow C,\ B \leftrightarrow D).\ ]$$



W sytuacji przedstawionej na rysunku zachodzą równości:

(3) $|\angle BQP| = |\angle BAP|$ (kąty wpisane w okręgu ω_1),
$|\angle PQC| = |\angle PDC|$ (kąty wpisane w okręgu ω_2),

(4) $|\angle BAP| = |\angle BAC| = \frac{1}{2}|\angle BOC|$ (kąty: wpisane i środkowy
$|\angle PDC| = |\angle BDC| = \frac{1}{2}|\angle BOC|$ w okręgu Ω).

Zatem
$$|\angle BQC| = |\angle BQP| + |\angle PQC| = |\angle BAP| + |\angle PDC| = |\angle BOC|,$$
co oznacza, że na czworokącie $BOQC$ da się opisać okrąg (nie uwidoczniony na rysunku); wobec tego

(5) $$|\angle BQO| = |\angle BCO| \qquad \text{(kąty wpisane w tym okręgu).}$$

Zauważmy jeszcze, że

(6) $$|\angle BCO| = 90^\circ - \tfrac{1}{2}|\angle BOC| \qquad \text{(kąty w trójkącie równoramiennym } OBC\text{).}$$

Z równości (5), (3), (4) i (6) otrzymujemy, ostatecznie,
$$|\angle OQP| = |\angle BQO| + |\angle BQP| = |\angle BCO| + |\angle BAP| = 90^\circ.$$