Anizotropia lepkości

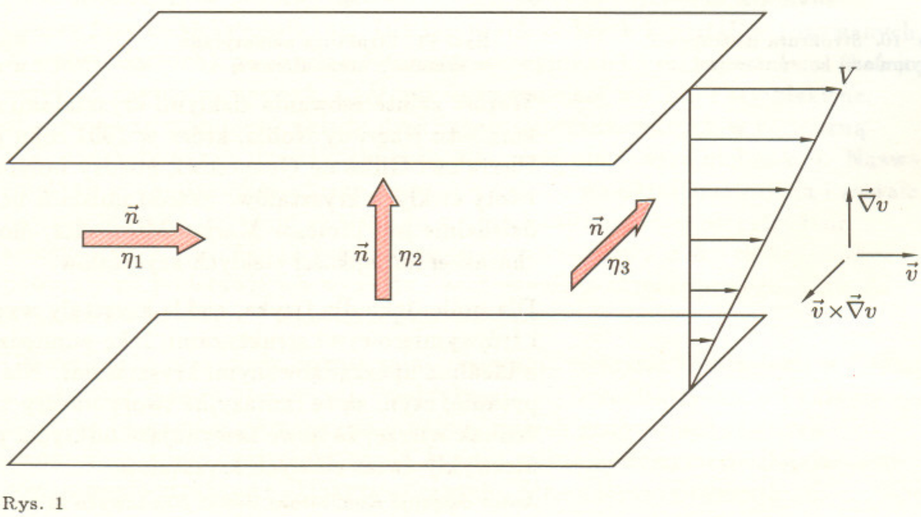
Grzegorz DERFEL

Tradycyjnie ciecze wyobrażamy sobie jako ośrodki pozbawione uporządkowania. Słuszność tego poglądu potwierdzają wyniki badań rentgenowskich świadczące o zaniku uporządkowania na odległościach rzędu kilku rozmiarów molekuł (atomów). Z tego powodu wszystkie własności makroskopowe cieczy są izotropowe. Inaczej jest w przypadku ciekłych kryształów, które będąc płynnymi wykazują anizotropię.

Skupimy się tu na nematycznych ciekłych kryształach, w których uporządkowanie jest najsłabsze: dotyczy ono tylko kierunków długich osi molekuł. W niewielkiej próbce nematyka ustawiają się one średnio w pewnym kierunku. Wersor $\mathbf{n}$ (wektor o jednostkowej długości) związany z tym kierunkiem zwany jest direktorem i stanowi podstawowe pojęcie w fizyce ciekłych kryształów. Możemy wprowadzić pojęcie pola direktora, podobnie jak wprowadza się pojęcie pola prędkości cieczy. W skali makroskopowej można opisać ciekły kryształ jako ośrodek ciągły, którego strukturę opisuje, oprócz tradycyjnych charakterystyk, takich jak pole gęstości czy prędkości, także pole direktora. Bardzo interesujące i ważne są własności sprężyste ciekłych kryształów związane z odkształceniami tego pola (*Delta* 4/1986). Orientacyjne uporządkowanie molekuł pociąga za sobą anizotropię własności fizycznych, czyli ich zależność od kierunku względem direktora.

Połączenie anizotropii i płynności rodzi wiele ciekawych zjawisk, wśród których efekty związane z przepływem należą do najbardziej zaskakujących. W szczególności sposób, w jaki zachodzi przepływ ciekłego kryształu, zależy od kierunku – sytuacja nie do pomyślenia w zwykłych cieczach. Relacja między naprężeniem ścinania (tj. stosunkiem siły F przyłożonej stycznie do powierzchni S, $\tau = F/S$) a szybkością ścinania $\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$ (tzn. zmianą prędkości przepływu w kierunku siły F ze zmianą położenia w kierunku prostopadłym) definiuje efektywne współczynniki lepkości: $\tau = \eta_{ef}\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$. Zależą one od wzajemnej orientacji direktora $\mathbf{n}$, prędkości $\mathbf{v}$ i gradientu wartości prędkości ∇v. Ponadto na ogół nie jest spełnione prawo Newtona orzekające proporcjonalność τ do $\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$. Oznacza to, że lepkość efektywna zależy od szybkości ścinania. Zachowanie takie nazywamy nienewtonowskim.

Anizotropię lepkości najbardziej poglądowo można przedstawić za pomocą efektywnych współczynników lepkości η_1, η_2, η_3 rządzących przepływem w trzech sytuacjach pokazanych na rysunku 1: $\mathbf{n}\|\mathbf{v}$, $\mathbf{n}\|\nabla v$, $\mathbf{n}\|\mathbf{v}\times\nabla v$.



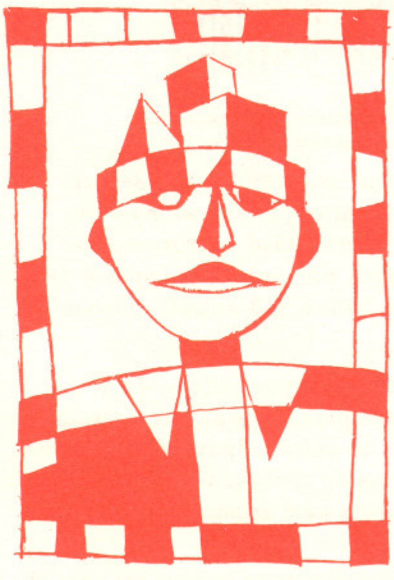
Rys. 1

Rozwiązanie zadania M 717.
Załóżmy, że każda bakteria jest w nieco innym odcieniu (bieli lub czerni) i podczas podziału odcień koloru jest zachowywany. Prawdopodobieństwo tego, że wylosowana przez nas bakteria ma dany odcień, wynosi $\frac{1}{30}$ (wszystkie odcienie są „równouprawnione"). Ponieważ 10 spośród odcieni jest białych, szansa, iż wylosujemy białą bakterię, jest równa

$$10 \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{3}.$$

Rozwiązanie zadania M 718.
Wyobraźmy sobie, że w maszynie szczęścia ukryty jest człowiek, który po naciśnięciu przez nas przycisku zaczyna rzucać symetryczną monetą. Po każdym rzucie dodaje nam jeden punkt, a jeśli wypadnie reszka, przestaje rzucać. Maszyna podaje stan konta wtedy i tylko wtedy, gdy ukryty w niej człowiek wyrzuci reszkę. Czytelnik zechce sprawdzić, że taka „maszyna" nie różni się działaniem od opisanej w zadaniu. Wystarczy zatem znaleźć prawdopodobieństwo tego, że w dziesięciu kolejnych rzutach (od dziesiątego do dziewiętnastego) wypadną dokładnie dwie reszki. Prawdopodobieństwo to, jak dobrze wiadomo, wynosi

$$\binom{10}{2}/2^{10} = 45/1024 \approx 0{,}044.$$



Rozwiązanie zadania F 391.
Oznaczmy przez W moc cieplną produkowaną przez organizm, a przez S – powierzchnię ciała człowieka. Energia oddawana przez człowieka musi bilansować energię wytwarzaną w organizmie. Z prawa Stefana-Boltzmanna znajdujemy

$$\sigma(T_0^4 - T^4) \cdot S = W\,,$$

gdzie $T_0 = 309$ K jest temperaturą człowieka. Stąd

$$T = \left(T_0^4 - \frac{W}{\sigma S}\right)^{1/4} = 293\ \mathrm{K}\,.$$

Przeliczając na stopnie Celsjusza dostajemy ostatecznie temperaturę otoczenia 20°C.

Rozwiązanie zadania F 392.
Zakładamy, że ciepło produkowane w Ziemi na jednostkę objętości jest wartością stałą, tj. $q = \mathrm{const.}$ Równanie przewodnictwa cieplnego przyjmuje postać

$$\lambda \cdot S \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = Vq\,,$$

gdzie $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $S = 4\pi r^2$, natomiast r jest odległością od środka Ziemi. Stąd wyznaczamy temperaturę

$$T = \frac{q}{3\lambda}\int_0^R r\,\mathrm{d}r = \frac{qR^2}{6\lambda}\,,$$

gdzie R jest promieniem Ziemi. Z drugiej strony z bilansu energii

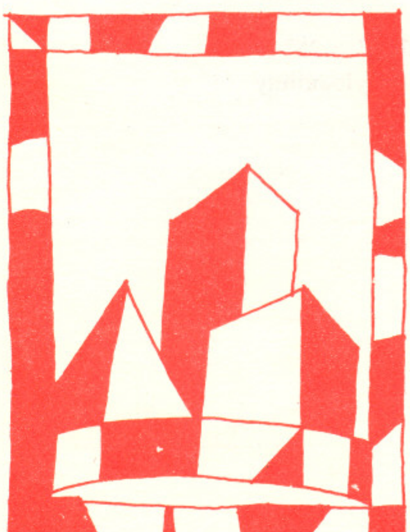
$$q \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = Q \cdot 4\pi R^2$$

otrzymujemy

$$q = \frac{3Q}{R}$$

i ostatecznie

$$T = \frac{QR}{2\lambda} \approx 4000\ \mathrm{K}\,.$$

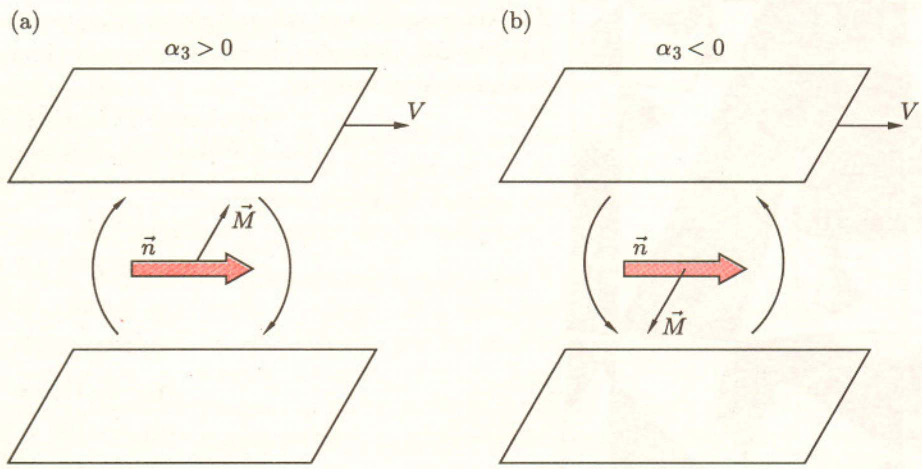


Pierwsze pomiary tych współczynników zostały wykonane w latach 1934–1936 przez Mariana Mięsowicza (w eksperymentach, które o ponad 30 lat wyprzedzały teoretyczną analizę zagadnienia). Ich wzajemna relacja: $\eta_1 < \eta_3 < \eta_2$ wydaje się intuicyjnie zrozumiała, jeśli wyobrazić sobie, jak ułożone są molekuły w każdej z trzech sytuacji. Anizotropia lepkości sprawia, że tracą sens pomiary tej wielkości metodami stosowanymi w przypadku zwykłych cieczy, np. metodą spadającej kulki. Dla ciekłych kryształów ważne jest jednoznaczne określenie orientacji direktora na powierzchniach, z którymi styka się ciekły kryształ. Najprostszy przepływ ma miejsce przy tak zwanym prostym ścinaniu, gdy ciecz zawarta jest między dwiema równoległymi płytkami, z których jedna porusza się z prędkością V względem drugiej.

W latach 60. i 70. powstało kilka prac teoretycznych opisujących hydrodynamikę ciekłych kryształów z dwóch odmiennych punktów widzenia: makroskopowego i mikroskopowego. Powszechniej stosowane jest to pierwsze podejście oparte na klasycznej mechanice ośrodków ciągłych i znane jako teoria ELP (Ericksen, Leslie, Parodi).

Przepływ zwykłej cieczy izotropowej jest określony równaniem Naviera-Stokesa. W ciekłych kryształach równanie to przybiera formę znacznie bardziej skomplikowaną. Działanie tarcia wewnętrznego jest w nim uwzględnione poprzez tensor naprężeń lepkich, zależny od aż sześciu współczynników o wymiarze lepkości: α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 i α_6. Dzięki istnieniu relacji między nimi liczba niezależnych współczynników maleje do pięciu. Dodatkowym zjawiskiem w ciekłych kryształach, jakie trzeba wziąć pod uwagę oprócz transportu masy, jest możliwość zmian kierunku direktora. Opisuje je II zasada Newtona dla ruchu obrotowego. Pomija się w niej – jako znikomy – moment bezwładności związany z direktorem.

Efektywne współczynniki lepkości w różnych konfiguracjach wyrażają się przez kombinacje α_i. Pomiary tych efektywnych współczynników lepkości pozwalają wyznaczyć każde α_i oddzielnie. Godny uwagi jest fakt, że niektóre ze zmierzonych wartości są ujemne. W pewnych przypadkach ten ujemny znak ma przejrzystą interpretację. Można wykazać, że w sytuacjach przedstawionych na rysunku 2 moment sił lepkich $\mathbf{M}$ usiłujący obrócić direktor zależy tylko od współczynnika α_3. W materiałach, dla których $\alpha_3 > 0$, moment ten działa tak, jak pokazuje rysunek 2a, powodując wychylenie w kierunku zgodnym z biegiem wskazówek zegara. Natomiast gdy $\alpha_3 < 0$ – wychylenie następuje w kierunku przeciwnym (rys. 2b). Powyższy przykład ilustruje, jak przepływ oddziaływa – za pośrednictwem tarcia wewnętrznego – na orientację direktora (zmieniając zresztą wartość efektywnej lepkości).



Rys. 2

Nawet w tak nieskomplikowanej sytuacji, jaką jest proste ścinanie, anizotropia lepkości daje niezwykłe efekty. Orientujące działanie przepływu może mieć dość skomplikowany przebieg. Niech np. direktor pozostaje w płaszczyźnie ścinania

Rozwiązanie zadania M 719.
Podstawiając $x = y = z = 0$ otrzymamy

$$2f(0) - 2f(0)^2 \geq \frac{1}{2},$$

czyli

$$\left(f(0) - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0,$$

skąd

$$f(0) = \frac{1}{2}.$$

Podstawiając $x = y = z = 1$ i rozumując jak przed chwilą otrzymujemy, że

$$f(1) = \frac{1}{2}.$$

Niech x będzie dowolne, a $y = z = 1$. Wówczas

$$2f(x) - f(x) \geq \frac{1}{2},$$

czyli

$$f(x) \geq \frac{1}{2}.$$

Podobnie, gdy przyjmiemy $y = z = 0$, otrzymamy przy dowolnym x, że

$$f(x) \leq \frac{1}{2}.$$

Ostatecznie

$$f(x) \equiv \frac{1}{2}.$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja ta spełnia warunki zadania.

prostopadłej do warstwy i równoległej do prędkości V jednej z płytek. Jeśli spełniony jest warunek $\alpha_3/\alpha_2 > 0$, to rozkład directora dąży – przy rosnącej wartości $\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$ – do granicznego uporządkowania, tworząc z $\mathbf{v}$ kąt „nasycenia" $\theta = \operatorname{arctg}\sqrt{\alpha_3/\alpha_2}$. W przeciwnym przypadku taka graniczna orientacja nie istnieje i kąt może przybrać dowolnie dużą wartość (jeśli nie przeszkodzą temu inne efekty zaburzające idealny przepływ). Warto wymienić jeszcze inne przypadki zdarzające się w nematykach, gdy $\alpha_3/\alpha_2 > 0$. Jeśli direktor nie leży w płaszczyźnie ścinania, to pojawiają się siły poprzeczne, które mogą nadać przepływowi prędkość prostopadłą do prędkości płytki. Jeśli direktor pierwotnie jest prostopadły do wymienionej płaszczyzny, to przepływ jest newtonowski ($\eta_{ef} = \eta_3 = \alpha_4/2$), dopóki V nie przekroczy krytycznej wartości. Jeśli ją przekroczy, direktor obraca się w kierunku płaszczyzny ścinania. Istnieje też szeroka klasa zjawisk polegających na rozwijaniu się niestabilności przypominających ruch konwekcyjny.

Przepływ zwykłej cieczy można scharakteryzować za pomocą bezwymiarowej liczby Reynoldsa $R = \varrho v d/\eta$ utworzonej z gęstości cieczy ϱ i z charakterystycznych dla danego przepływu długości d, prędkości v i lepkości η. Liczba ta określa, czy w danej sytuacji o zachowaniu się cieczy decyduje bezwładność czy lepkość. Umożliwia także rozpatrywanie podobieństw przepływów zachodzących w różnych skalach. W ciekłych kryształach oprócz R można utworzyć inną wielkość bezwymiarową zwaną liczbą Ericksena $E = \eta v d/K$, w której K charakteryzuje własności sprężyste direktora. Liczba ta wyznacza względną rolę zjawisk dynamicznych (przepływ) i statycznych (deformacja pola direktora). Przy małych E przepływ prawie nie zmienia orientacji direktora, przy dużych – uporządkowanie direktora określone jest siłami lepkimi a nie sprężystymi.

W ciekłych kryształach opór lepki może wystąpić nawet bez przepływu – przy samych tylko zmianach orientacji direktora wywołanych np. polem elektrycznym lub magnetycznym. Na ogół jednak odkształcenie pola direktora pociąga za sobą niewielkie przemieszczenie cieczy.

Rolę tarcia wewnętrznego przy tego rodzaju efektach można stwierdzić obserwując szybkość zanikania ciemnych cyfr na ciekłokrystalicznym ekraniku kalkulatora lub zegarka. Lepkość hamuje powrót direktora do niezaburzonego polem elektrycznym stanu, który nie powoduje zaciemnienia ekranu. Szczególnie wyraźne jest spowolnienie zanikania cyfr w niskich temperaturach. (Przy obserwacji tego efektu nie należy przekraczać granic zakresu temperatur pracy wskaźnika ciekłokrystalicznego podanych w instrukcji obsługi urządzenia.) Zwykle pożądane są jak najkrótsze czasy reakcji wskaźnika. Dlatego jednym z kryteriów sporządzania mieszanin, jakimi napełnia się te urządzenia, jest minimalizacja lepkości.

Współczynniki lepkości dla $T = 25°$
p-n-metoksybenzylideno-p'-butyloaniliny
$[10^{-3}\ \mathrm{kg\ m^{-1}\ s^{-1}}]$

$$\eta_1 = 24{,}0 \pm 0{,}5$$
$$\eta_2 = 136 \pm 6$$
$$\eta_3 = 41{,}3 \pm 0{,}8$$
$$\alpha_1 = -18 \pm 6$$
$$\alpha_2 = -109 \pm 2$$
$$\alpha_3 = -1{,}0 \pm 0{,}2$$
$$\alpha_4 = 83 \pm 2$$
$$\alpha_5 = 80 \pm 15$$
$$\alpha_6 = -34 \pm 2$$