Kącik olimpijski (13)

Rozwiązanie zadania F 415. Moc wypromieniowywana przez powierzchnię Słońca wynosi, zgodnie z prawem Stefana-Boltzmanna $P = 4\pi R_S^2 \cdot \sigma T_S^4$; $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K^4}}$. Strumień energii przepływającej w jednostce czasu przez prostopadłą do kierunku promieni słonecznych powierzchnię jednostkową umieszczoną w odległości R od centrum Słońca wynosi $J_E(R) = P/4\pi R^2$. Dla satelity ziemskiego można przyjąć $R = R_{Z-S}$. W jednostce czasu satelita absorbuje więc energię $\frac{\Delta E}{\Delta t} = J_E(R_{Z-S})\pi r_{\mathrm{sat}}^2$. Energia wypromieniowana z satelity w jednostce czasu wynosi $4\pi r_{\mathrm{sat}}^2 \cdot \sigma T_{\mathrm{sat}}^4$. Temperatura satelity będzie ustalona, gdy energia absorbowana i emitowana będą równe. Ostatecznie dostajemy więc

$$T_{\mathrm{sat}} = T_S \cdot \sqrt{\frac{R_S}{2R_{Z-S}}} \approx 290\ \mathrm{K} = 17^\circ\mathrm{C}.$$

Rozwiązanie zadania M 753. Wprowadźmy na płaszczyźnie kartezjański układ współrzędnych i oznaczmy $|[x,y]| = \sqrt{x^2+y^2}$, $\|[x,y]\| = \max(|x|,|y|)$. Udowodnimy następujące twierdzenie: jeśli $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ są takimi wektorami płaszczyzny, że $\|\mathbf{v}_j\| \le 1$ dla wszystkich j, to można tak dobrać znaki $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \{-1, 1\}$, by $\|r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \cdots + r_n\mathbf{v}_n\| \le 2$. Z tego twierdzenia, oczywiście, wynika teza zadania, bo dla dowolnego wektora v zachodzą nierówności $\|v\| \le |v| \le \sqrt{2}\|v\|$, natomiast $2\sqrt{2} < 3$.

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że twierdzenie jest fałszywe i niech n będzie najmniejszą liczbą naturalną, dla której istnieje kontrprzykład, czyli takie wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ o długości nie większej niż 1, że dla dowolnego układu znaków jest $\|r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \cdots + r_n\mathbf{v}_n\| > 2$. Każdy z wektorów $\mathbf{v}_j$ należy do jednej z ćwiartek układu współrzędnych: $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 :\ x, y \ge 0\}$, $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 :\ x \ge 0 > y\}$, $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 :\ y \ge 0 > x\}$, $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 :\ x, y < 0\}$. Wykażemy, że do każdego z tych zbiorów należy co najwyżej jeden z wektorów $\mathbf{v}_j$. Istotnie, jeśli np. $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ należą do jednego z tych zbiorów, to łatwo sprawdzić, że $\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| \le 1$, a zatem układ wektorów $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n$ spełnia nasze twierdzenie. Istnieje więc taki układ znaków, że $\|r_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + r_3\mathbf{v}_3 + \cdots r_n\mathbf{v}_n\| \le 2$. Ale wówczas biorąc układ znaków r_1, $r_2 = -r_1, r_3, \ldots, r_n$ widzimy, że wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ również spełniają twierdzenie, wbrew założeniom.

Zatem, do każdej ćwiartki układu współrzędnych należy co najwyżej jeden wektor $\mathbf{v}_j$, zatem $n \le 4$ i wystarczy położyć $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 1$, aby otrzymać $\|r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \cdots + r_n\mathbf{v}_n\| \le 2$. Wykazaliśmy więc, przez sprowadzenie do niedorzeczności, że twierdzenie jest prawdziwe, co kończy dowód.

Taki jeden fakt, a ile zadań...

Niech n będzie liczbą naturalną, p dzielnikiem pierwszym liczby $n!$, a α – wykładnikiem, z którym p występuje w rozkładzie liczby $n!$ na czynniki pierwsze. Okazuje się, że

$$\alpha = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^s}\right],$$

gdzie s jest taką liczbą naturalną, że $p^s \le n < p^{s+1}$, a symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x.

Istotnie, obliczmy najpierw, ile jest w ciągu $1, 2, \ldots, n$ liczb podzielnych przez p. Jeżeli takich liczb jest k, to liczba kp jest wśród nich największa i dlatego $kp \le n < (k+1)p$, czyli $k \le n/p < k+1$. A to oznacza, że $k = [n/p]$. Wśród liczb $1, 2, \ldots, n$ podzielnymi przez p są liczby $p, 2p, 3p, \ldots, [\frac{n}{p}]p$. Możemy więc napisać: $n! = p \cdot 2p \cdot \ldots \cdot [\frac{n}{p}]p \cdot M_1 = p^{[n/p]} \cdot [\frac{n}{p}]! \cdot M_1$, gdzie M_1 nie dzieli się przez p.

Jeżeli $[n/p] < p$, to $\alpha = [n/p]$. Jeśli natomiast $[n/p] \ge p$, to dalej wyodrębniamy liczby podzielne przez p w ciągu $1, 2, 3, \ldots, [n/p]$. Jest ich tam (proszę sprawdzić!) $\left[\frac{[n/p]}{p}\right] = \left[\frac{n}{p^2}\right]$. Stąd $\left[\frac{n}{p}\right]! = p \cdot 2p \cdot \ldots \cdot \left[\frac{n}{p^2}\right] p \cdot M_2 = p^{[n/p^2]} \cdot \left[\frac{n}{p^2}\right]! \cdot M_2$, gdzie M_2 nie dzieli się przez p. I znowu, jeśli $[n/p^2] < p$, to $\alpha = [n/p] + [n/p^2]$. W przeciwnym przypadku, tzn. gdy $[n/p^2] \ge p$, rozumujemy jak przed chwilą, dochodząc ostatecznie do żądanego wzoru.

Zastosujmy otrzymany wzór do rozwiązania kilku zadań olimpijskich.

1. (XVIII Olimpiada Matematyczna) Znaleźć najwyższą potęgę liczby 2 będącą dzielnikiem liczby $L_n = (n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot 2n$, gdzie $n \in \mathbf{N}$.

Rozwiązanie: Niech α i β będą odpowiednio wykładnikami, z którymi liczba 2 występuje w rozkładzie liczb $n!$ i $(2n)!$ na czynniki pierwsze. Zgodnie z otrzymanym wzorem

$$\alpha = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2^l}\right], \qquad \beta = \left[\frac{2n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{2n}{2^{l+1}}\right],$$

gdzie $2^l \le n < 2^{l+1}$. A ponieważ $L_n = (2n)!/n!$, więc w rozkładzie L_n na czynniki pierwsze liczba 2 występuje z wykładnikiem $\beta - \alpha = n$.

2. Iloma zerami kończy się liczba 1995! ?

Rozwiązanie: Trzeba znaleźć $\max\{k \in \mathbf{N}\colon 10^k \mid 1995!\}$. Ale $10 = 2 \cdot 5$, więc wystarczy wyznaczyć wykładnik potęgi liczby 5, z którym wchodzi ona w rozkład na czynniki pierwsze liczby 1995! (dlaczego?). A ten, jak już wiemy, jest równy

$$\left[\frac{1995}{5}\right] + \left[\frac{1995}{5^2}\right] + \left[\frac{1995}{5^3}\right] + \left[\frac{1995}{5^4}\right] = 399 + 79 + 15 + 3 = 496.$$

3. (XIV MOM) Niech m i n będą nieujemnymi liczbami całkowitymi. Dowieść, że liczba

$$\frac{(2m)! \cdot (2n)!}{n! \cdot m! \cdot (m+n)!}$$

jest całkowita.

Wskazówka: Wykazać, że dowolna liczba pierwsza p występuje w rozkładzie liczby $m! \cdot n! \cdot (m+n)!$ na czynniki pierwsze z wykładnikiem nie większym niż w rozkładzie liczby $(2m)! \cdot (2n)!$. W tym celu należy udowodnić najpierw nierówność $[2x] + [2y] \ge [x] + [y] + [x+y]$.

4. Wykazać, że dla żadnego $n \in \mathbf{N}$ liczba 2^n nie dzieli liczby $n!$.

5. Dowieść, że dla każdego $n \in \mathbf{N}$ liczba $(n!)!$ jest podzielna przez $(n!)^{(n-1)!}$.

6. (XLIII O.M.) Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej k liczba $(k!)^{k^2+k+1}$ jest dzielnikiem liczby $(k^3)!$.

7. Dowieść, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych m i n liczba $\frac{(5m)! \cdot (5n)!}{m! \cdot n! \cdot (3m+n)! \cdot (3n+m)!}$ jest całkowita.

8. Wyznaczyć największą potęgę liczby 2, która jest dzielnikiem liczby $(2^n)!$, gdzie $n \in \mathbf{N}$.

Henryk PAWŁOWSKI