

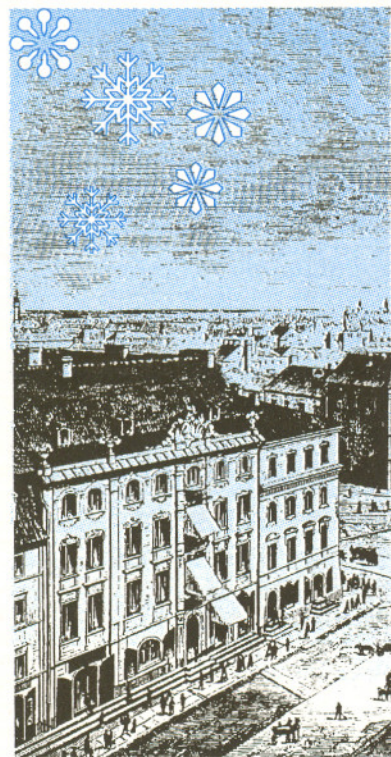


Czy znamy wiek Wszechświata?

Tomasz KWAST

Rozwiązanie zadania F 421.

Równanie (3) jest niepoprawne. Toczenie się bez poślizgu można traktować jako obrót wokół punktu podparcia (chwilowego), gdyż spoczywa on w inercyjnym układzie odniesienia. W naszym przypadku punkt podparcia ślizga się po płaszczyźnie. Jednak nawet wtedy, gdy można mówić o chwilowym obrotocie wokół punktu podparcia, ruch obrotowy opisujemy jednym równaniem: albo jako obrót względem środka masy, albo jako obrót wokół punktu podparcia. Ruch pręta poprawnie opisują równania (1) i (2) uzupełnione związkiem $z = R \cos \theta$.



Rozwiązanie zadania F 422. Ponieważ na oba ciała nie działa siła tarcia, ich prędkości po drugiej stronie doliny są jednakowe i równe v_0 (zasada zachowania energii). Na opadającym fragmencie zbrocza składowa pozioma prędkości ciała staje się większa od v_0 , gdyż siła reakcji podłoża N ma poziomą składową przyspieszającą ciało. Na stoku podnoszącym się w górę pozioma składowa spowalnia ciało (do prędkości v_0). Ponieważ ciało A w każdej chwili ma składową prędkości większą od (lub co najmniej równą) v_0 , czyli większą lub równą prędkości ciała B , to ciało A szybciej znajdzie się po drugiej stronie doliny.

Odległe galaktyki rozbiegają się we wszystkie strony od naszej Galaktyki z prędkością wprost proporcjonalną do odległości – fakt ten jest treścią tzw. prawa Hubble’a. Nie wynika z tego bynajmniej, że to my znajdujemy się w centrum tego rozbiegania się. To samo zjawisko widziałby każdy mieszkaniowiec dowolnej innej galaktyki i miałby wrażenie, że znajduje się w jakimś „centrum”. Natomiast wynika z tego, że kiedyś w odległej przeszłości wszystkie galaktyki musiały znajdować się „praktycznie w jednym miejscu” i – co więcej – można łatwo oszacować, kiedy to było. Skoro prawo Hubble’a głosi, że $v = Hr$ (H jest tzw. stałą Hubble’a – współczynnikiem proporcjonalności w prawie Hubble’a), to jasne, że na przebycie drogi r z prędkością v każda galaktyka potrzebowała $r/v = H^{-1}$ czasu. Stałą Hubble’a należy wyznaczyć z obserwacji, co zresztą nie jest proste, czego dowodzi fakt, że sam Hubble ocenił ją na 500 (km/s)/Mpc, podczas gdy obecnie przyjmuje się raczej wartość zbliżoną do 50 (km/s)/Mpc.

Tak określony wiek Wszechświata każdy może sobie bez trudu obliczyć, wyczuwamy jednak, że jest to ocena nie najlepsza. Tak by było, gdyby prędkość galaktyki na całej drodze r była stała, co z pewnością nie może być prawdą. Jeżeli Wszechświat zaczął swoje istnienie Wielkim Wybuchem, tempo jego ekspansji musi z upływem czasu maleć wskutek powszechnej grawitacji. Niestety, tempo malenia ekspansji jest jeszcze trudniej wyznaczyć i dlatego tradycyjnie podaje się ocenę wieku Wszechświata dla sytuacji, w której jego ekspansja zapewnia rozbieganie się do nieskończoności, aczkolwiek w tempie najwolniejszym z możliwych (tzw. Wszechświat płaski). Niewiele to zmienia, jeśli chodzi o wynik liczbowy, mianowicie wiek Wszechświata wynosi wtedy $t_0 = \frac{2}{3}H^{-1}$, co daje 13 mld lat, jeżeli $H = 50$ (km/s)/Mpc, albo 8 mld lat, jeżeli $H = 80$ (km/s)/Mpc – obecnie uważa się, że w takich właśnie granicach zawiera się stała Hubble’a.

I wszystko byłoby w porządku, gdyby nie nasza wiedza o gwiazdach. Najstarszymi w Galaktyce gwiazdami są te, które tworzą gromady kuliste. Mianowicie, przy Wielkim Wybuchu powstał wodór i hel (teoria określa ich obfitość) i śladowe ilości litu, natomiast wszystkie pierwiastki cięższe zostały wyprodukowane we wnętrzach gwiazd pierwszego pokolenia. Najmasywniejsze z nich, a więc ewoluujące najszybciej, eksplodowały już dawno jako supernowe rozsiewając w przestrzeni produkty własnych przemian jądrowych. Z tak wzbogaconej materii międzygwiazdowej powstały kolejne gwiazdy o bardziej urozmaiconym składzie chemicznym, wśród nich także Słońce. Tak czy inaczej naturalne jest, że podjęto próby oceny wieku gwiazd gromad kulistych, ponieważ ich skład chemiczny dowodzi, że są właśnie owymi gwiazdami pierwszego pokolenia, przy czym – to chyba oczywiste – ich wiek nie powinien być większy od wieku Wszechświata. I tu pojawiły się kłopoty.

Gwiazdy żyjące kosztem „spalania” wodoru układają się na diagramie Hertzsprunga–Russella w tzw. ciąg główny. Jak wspomnieliśmy, najkrócej żyją gwiazdy najmasywniejsze, a więc najjaśniejsze, leżące w górnej części ciągu głównego. Po zużyciu wodoru w centralnych częściach gwiazda puchnie, co prowadzi do spadku temperatury powierzchniowej, a więc przesunięcia się jej na diagramie H–R w prawo. Znając z obserwacji jej jasność i temperaturę, a z teorii jej model, można by w zasadzie już ocenić jej wiek. Niestety, jest to taki właśnie okres w życiu gwiazdy, dla którego wszelkie oceny są bardzo niepewne. Wcześniej też niepodobna wieku gwiazdy ocenić, ponieważ dopóki ma ona w centrum wodór, to wprawdzie dobrze znamy jej model, ale sama gwiazda bardzo długo tkwi niemal w jednym miejscu diagramu H–R. W rezultacie najpewniejszym wskaźnikiem wieku – za to całej gromady – pozostaje punkt, w którym ciąg główny gromady odgina się w prawo, bo odpowiada on zarówno dobrze znanemu modelowi gwiazdy, jak i dobrze określone momentowi jej życia.



Rozwiązanie zadania M 763. Tak.
 Niech, na przykład, $P(Z = -2) =$
 $= P(Z = -1) = P(Z = 1) =$
 $= P(Z = 2) = 1/4$. Połóżmy $f(x) = |x|$ i

$$g(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Czytelnik bez kłopotu sprawdzi, że zmienne losowe $f(Z)$ i $g(Z)$ są niezależne. Płyńe stąd wniosek, że zdarzenia niezależne mogą mieć wspólną przyczynę.

Należy więc diagram H-R obserwowanej gromady porównać z teoretycznymi diagramami odpowiadającymi rozmaitym wiekom gromady i wybrać najlepiej pasujący. Oczywiście, jest przy tym dużo więcej pracy, trzeba bowiem wyznaczyć odległość gromady, uwzględnić pochłanianie światła w materii międzygwiazdowej, wyznaczyć skład chemiczny gwiazd gromady, powyznaczać ich masy (wszystko po to, by potem wybierać spośród właściwych modeli teoretycznych) itd. Taką dobrze zbadaną gromadą kulistą stała się ostatnio M92. Krótko mówiąc, jej wiek wyznaczony przy całej najlepszej wiedzy okazał się równy $15,8 \pm 2,1$ mld lat! Nie jest to wynik drastycznie różny od otrzymanego na podstawie stałej Hubble'a, jednak zbyt duży i to na pewno nie da spokoju badaczom. A sprawa jest warta dalszych badań, ponieważ w tej chwili wiadomo, że gdzieś są luki w naszej wiedzy, natomiast uzgodnienie ocen wieku Wszechświata przysporzyłoby tej wiedzy po prostu solidności.



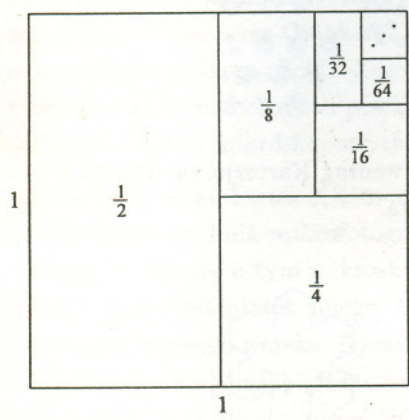
Matematyczne miniatury

Przykład 2

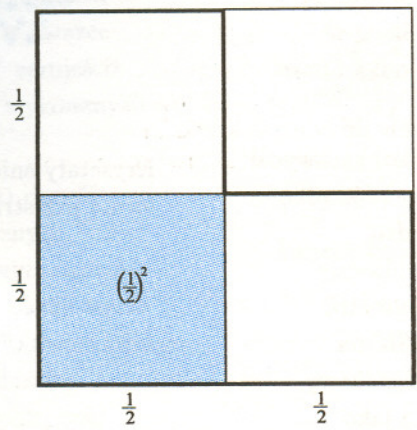
W konkretnej sytuacji nietrudno przekonać się, że

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1.$$

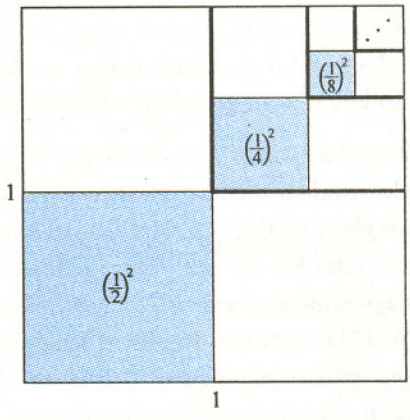
Możemy popatrzeć na rysunek 1.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Czy równie prosto możemy obliczyć sumę

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{16}\right)^2 + \dots?$$

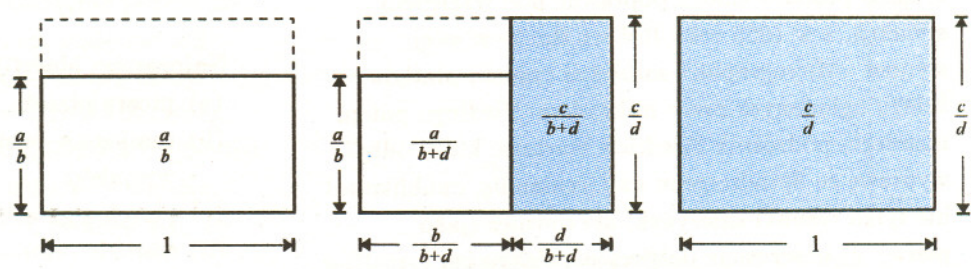
Ależ tak, patrząc na rysunki 2 i 3, z łatwością stwierdzamy, że wynosi ona $\frac{1}{3}$.

Przykład 3

Dla takich dodatnich liczb a, b, c, d , że $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Można to sprawdzić rachunkowo, ale można też geometrycznie, jak zrobił to w 1484 roku N. Chuquet.



Ciąg dalszy na str. 10.



Rozwiązanie zadania M 764. Nie. Płaszczyzna przekroju musiałaby przecinać pięć ścian sześcianu, a wśród dowolnych pięciu ścian sześcianu są dwie pary ścian równoległych. Wynika stąd, że pięciokątny przekrój sześcianu ma dwie pary boków równoległych. Jednak pięciokąt foremny nie ma dwóch równoległych boków.

Czytelnik zechce się zastanowić, czy istnieje przekrój sześcianu będący pięciokątem o wszystkich bokach równej długości.