Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Regulamin

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs – ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.

2. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po cztery zadania w każdym numerze: dwa z matematyki i dwa z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 7 i 8 każdego roku).

3. Uczestnikiem ligi może być każdy.

4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do redakcji *Delty*. Uczestnikiem zostaje się po przysłaniu rozwiązania co najmniej jednego zadania.

5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.

6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n+3$ (dodawanie modulo 12; na przykład termin nadsyłania rozwiązań zadań z numeru 11/1995 upływa 29 lutego 1996). W numerze $n+4$ podane są szkicowe rozwiązania.

7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru oraz podpisane imieniem i nazwiskiem. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci – roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.

8. Prace powinny być samodzielne. Jednobrzmiące rozwiązania pisane przez różnych uczestników nie będą brane pod uwagę.

9. Rozwiązanie każdego zadania jest ocenione w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Przy ocenie brana jest pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.

10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po wystawieniu ocen. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 obliczaną według następującej reguły: jeśli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4 - 3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Niektóre z zadań można znaleźć (w brzmieniu identycznym lub bardzo zbliżonym) wraz z rozwiązaniami w różnych książkach i czasopismach. Uczestnicy, którzy w takich przypadkach przyślą zamiast własnego rozwiązania dokładny odsyłacz do literatury, otrzymają ocenę maksymalną, pod warunkiem, że w cytowanym źródle istotnie znajduje się pełne rozwiązanie (dowód, obliczenie, konstrukcja).

12. Czytelnicy *Delty* mogą zgłaszać propozycje zadań; jeśli zadanie nie jest własnego autorstwa, należy podawać źródło. Gdy zadanie wykorzystane w lidze pochodzi z propozycji uczestnika ligi (tj. osoby, która przysłała już rozwiązanie jakiegoś zadania – por. p. **4**), a dostarczone zostało wraz z rozwiązaniem (choćby szkicowym, ale poprawnym, ewentualnie odsyłaczem do literatury), uczestnik otrzymuje ocenę maksymalną.

13. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań, obliczone według reguły podanej w p. **10**, są sumowane – oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy **44** punktów w jednej z tych dwóch dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44**.

14. Po zgromadzeniu **44** punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość **44** zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.

15. Trzykrotne uzyskanie członkostwa **Klubu 44** daje tytuł **Weterana Klubu 44**.

16. Aby uzyskać informacje o swoich wynikach, należy przysłać do redakcji *Delty* kartkę pocztową (oddzielną dla matematyki i dla fizyki), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Zaleca się przysyłanie takich kartek nie częściej niż co kilka miesięcy, gdy uzbiera się materiał dotyczący rozwiązań kilkunastu zadań.

17. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*. Nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów co najwyżej trzykrotnie; następny raz ukaże się wtedy, gdy uczestnik wykona ruch w górę.

18. Raz do roku, w numerze lutowym, drukowane jest omówienie przebiegu konkursu, prezentowane są w skrócie ciekawsze rozwiązania i uogólnienia oraz ogłaszana jest obszerna czołówka.

19. Członkowie **Klubu 44** są zapraszani na spotkania **Klubu 44**.

20. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możność zmian regulaminu.

Lista uczestników ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 301 (WT=2,03) i 302 (WT=2,14) z numeru 5/1995

Mirosław Matlęga	–	43,59
Tomasz Wietecha	–	2- 42,33
Lesław Skrzypek	–	2- 41,36
Adam Czornik	–	2- 41,29
Piotr Lipiński	–	37,82
Jan Ciach	–	4- 37,72
Tadeusz Józefczyk	–	2- 36,66
Henryk Kornacki	–	2- 36,45
Krzysztof Zapisek	–	35,10
Tomasz Kulpa	–	1- 34,45
Marek Karaś	–	31,81
Piotr Żmijewski	–	29,84
Jerzy Witkowski	–	28,97
Mikołaj Rotkiewicz	–	1- 25,42
Wojciech Maciak	–	22,27
Krzysztof Parol	–	21,26
Jarosław Łazuka	–	21,23
Kazimierz Serbin	–	3- 20,69
Andrzej Dudek	–	20,69
Konrad Patkowski	–	20,69

Legenda (przykładowo): stan konta 4-37,72 oznacza, że uczestnik już czterokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (piątej) rundzie ma 37,72 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;

– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 1993, 1994 lub 1995.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście, jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani **Klubu 44 M** (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik, M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (4), M. Prauza, P. Kumor, P. Gadziński (4), K. Jedziniak, J. Olszewski (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie; nie powtarzamy nazwisk figurujących na liście powyżej):

„dwukrotni": Z. Bartold, P. Jędrzejewicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, D. Kurpiel, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Pióro, S. Solecki, G. Zakrzewski;

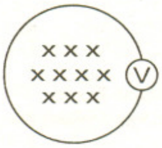
„jednokrotni": T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Kasperski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, P. Kubit, A. Langer, R. Latała, P. Lizak, J. Mańdziuk, M. Marczak, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, W. Olszewski, W. Pompe, M. Roman, A. Ruszel, J. Siwy, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski.

Termin nadsyłania rozwiązań 31 V 1996

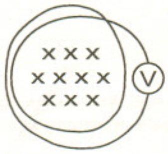
Zadania z fizyki nr 213, 214

Redaguje Jerzy B. BROJAN

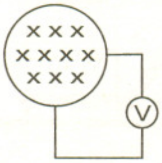
Rys. 1



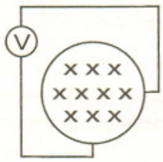
Rys. 2



Rys.3



Rys. 4



Rys.5

213. Dwa krążki połączone cieńszą ośką, na którą nawinięta jest nitka (rys. 1), tworzą znaną zabawkę „jo-jo". Krążki zjeżdżając w dół obracają się coraz szybciej, a potem wspinają się po nitce do góry i zatrzymują się. Aby zwiększyć wysokość osiąganą przez „jo-jo" (albo wyrównać straty energii), grający może wykonywać ruchy pionowe ręką trzymającą górny koniec nitki.
a) Załóżmy, że w czasie przejścia krążków przez dolne położenie (gdy nitka jest całkowicie rozwinięta) górny koniec nitki jest nieruchomy i w kolejnych przejściach znajduje się na jednakowym poziomie. Czy można tak nim poruszać w czasie wspinania się i opadania krążków, aby je rozpędzić, tzn. aby zwiększyć prędkość kątową w dolnym położeniu? Jeśli tak, to opisać prawidłową metodę.
b) Opisać najskuteczniejszą metodę rozpędzenia zabawki, jeśli w jej dolnym położeniu górny koniec nitki nie musi być nieruchomy. Dla uproszczenia można przyjąć, że wytrzymałość nitki jest dowolnie duża.

214. W ograniczonym obszarze przestrzeni występuje zmienne pole magnetyczne wytworzone przez zewnętrzne źródło, tak że woltomierz włączony w obwód opasujący ten obszar (zob. rys. 2; na rysunkach pole zostało oznaczone krzyżykami) wskazuje przez pewien czas 1 V. Jakie napięcie wskaże w takiej sytuacji:
a) woltomierz włączony w podwójną pętlę (rys. 3), b) woltomierz dołączony do pętli z drutu oporowego według rysunku 4, c) woltomierz dołączony do pętli z drutu oporowego według rysunku 5, d) woltomierz dołączony do pętli z drutu nadprzewodzącego według rysunku 4?
W razie potrzeby można przyjąć upraszczające założenia co do ułożenia przewodów.
W przypadkach b) i c) należy pominąć własne pole magnetyczne pętli w porównaniu z polem zewnętrznym.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1995

Przypominamy treść zadań:

205. Małe naładowane ciało krąży po okręgu o promieniu r_0 w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B_0. Jeśli pole magnetyczne nie zmieniając kierunku bardzo powoli wzrośnie lub zmaleje do wartości B_1, to ciało nadal będzie krążyć po okręgu. Znaleźć wzór na promień r_1 nowego okręgu.

206. Na prostokątnym stole bilardowym o wymiarach $a \times b$ ($a = 1$ m, $b = 2$ m) znajdują się dwie jednakowe bile o średnicy $d = 6$ cm – jedna na środku stołu, a druga przy środku krótszego boku. Chcemy tak uderzyć w drugą bilę, aby trafiła ona w środkową, dalej jedna z bil odbiła się od dłuższego boku stołu, a druga kolejno od krótszego, dłuższego i znów krótszego, po czym zderzyły się ponownie. Ocenić niezbędną do tego dokładność kierunku uderzenia początkowego (w stopniach).

205. Oznaczmy masę ciała przez m, a jego ładunek przez q. Załóżmy, że pole B wzrasta; wtedy, jak wynika z reguły Lenza, wirowe pole elektryczne będzie rozpędzało krążące ciało (niezależnie od znaku jego ładunku). W czasie jednego okrążenia możemy przybliżyć tor ciała przez okrąg, a przyrost jego energii kinetycznej jest niewielki i równy pracy pola elektrycznego $q\oint \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$. Występująca tu całka jest – zgodnie z prawem Maxwella – równa $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \pi r^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$. Ponieważ czas zakreślenia przez ciało jednego okrążenia wynosi $\frac{2\pi r}{v}$, więc otrzymujemy równanie

$$q\cdot \pi r^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{v}{2\pi r} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\mathrm{kin}}}{\mathrm{d}t} = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,.$$

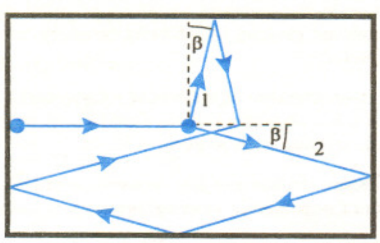
Korzystając ze wzoru na promień $r = \frac{mv}{qB}$ dochodzimy do tożsamości

$$\frac{\mathrm{d}B}{B} + 2\frac{\mathrm{d}r}{r} = 0\,,$$

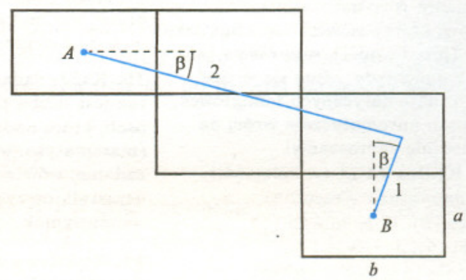
czyli $Br^2 = \mathrm{const.}$ Rozwiązaniem jest wyrażenie $r_1 = r_0\sqrt{(B_0/B_1)}$.

206. Efekty wynikające z tarcia, niepełnej sprężystości odbić i zderzeń, a także z ruchu obrotowego bil mają wpływ na prawidłowy kierunek uderzenia początkowego, ale ich znaczenie dla wymaganej dokładności tego kierunku jest prawdopodobnie niewielkie. Dlatego – zwłaszcza przy przybliżonej ocenie – możemy te efekty pominąć. Oznaczmy przez v prędkość początkową, przez v_1 prędkość bili odbitej w stronę dłuższego boku, a przez v_2 – w stronę krótszego. Stosując do zderzenia zasady zachowania pędu i energii nietrudno dojść do wniosku, że bile po zderzeniu pobiegną wzajemnie prostopadle; jeśli przez β oznaczymy kąt między kierunkiem pierwszej bili a krótszym bokiem (rys. 6), to $v_1 = v\sin\beta$, a $v_2 = v\cos\beta$.

Cały tor obu bil najlepiej jest zobrazować „sklejając" pięć rysunków stołu i przechodząc na sąsiedni rysunek zamiast odbicia – wtedy, jeśli kąt padania równa się kątowi odbicia, to obraz toru na następnym rysunku leży na tej samej prostej.



Rys. 6



Rys. 7

Widzimy, że rysunek 7 jest równoważny rysunkowi 6. Jeśli chwilowo pominiemy średnicę kul, to zderzenie zajdzie wtedy, gdy wektor prędkości względnej

$\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1=[v_2\cos\beta - v_1\sin\beta, -v_2\sin\beta - v_1\cos\beta]=v[\cos 2\beta, -\sin 2\beta]$

będzie równoległy do wektora $\overrightarrow{AB} = [2b, -2a]$. Takie „doskonałe" zderzenie nastąpi więc dla $\beta = \beta_0$, gdzie $\operatorname{tg} 2\beta_0 = a/b$ (przy podanych wartościach a i b mamy $\beta_0 = 13{,}3^\circ$). Przyjmijmy teraz, że $\beta \neq \beta_0$; wtedy, jak można wykazać, minimalna odległość środków bil będzie równa $2|a\cos 2\beta - b\sin 2\beta|$. Gdy przyjmiemy, że ta minimalna odległość jest równa d (bile ledwie się musną) oraz podstawimy $\beta = \beta_0 + \delta$ (gdzie δ jest małe), otrzymujemy po przekształceniach równanie

$$d = 4\delta\sqrt{a^2+b^2}\,.$$

Pozostaje nam wyznaczyć związek między δ a szukaną niedokładnością kierunku początkowego, którą oznaczymy przez ε. Ponieważ bile znajdowały się początkowo w odległości $b/2$, więc zmiana kąta o ε pociąga za sobą boczne przesunięcie przy pierwszym zderzeniu o $\varepsilon b/2$. To zaś z kolei – jak można się przekonać z odpowiedniego rysunku – zmienia kąt β o $\delta = \varepsilon b/(2d\cos\beta_0)$ lub też o $\delta = \varepsilon b/(2d\sin\beta_0)$, przy czym pierwszy wzór obowiązuje wtedy, gdy lewa bila (rys. 6) biegnie dalej torem 1, a środkowa torem 2, natomiast drugi wzór – gdy jest na odwrót. W pierwszym przypadku mamy więc wzór

$$\varepsilon = \frac{2d\delta\cos\beta_0}{b} = \frac{d^2\cos\beta_0}{2b\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$

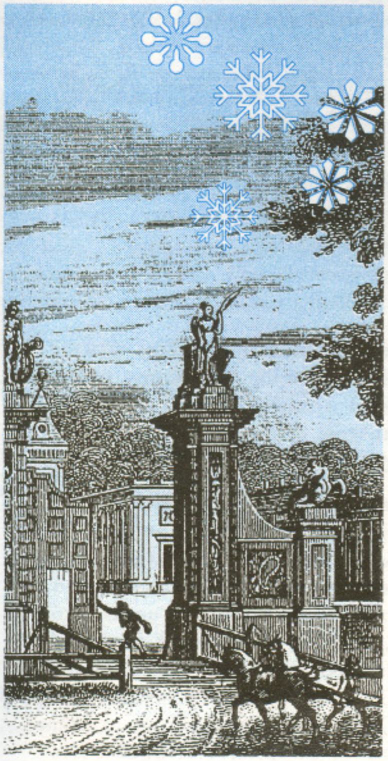
Wielkości a i b w tym wzorze należy jeszcze zastąpić przez $a-d$ i $b-d$ (wielkość bil powoduje zmniejszenie „efektywnych wymiarów stołu"). Po podstawieniu danych liczbowych $\varepsilon \approx 0{,}00042\ \mathrm{rad} = 0{,}024^\circ = 1{,}4'$. W drugim przypadku zamieniając cosinus na sinus otrzymujemy $\varepsilon = 0{,}34'$.

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po 200 zadaniach

Artur Gawryszczak	– Dubeczno	43,40
Andrzej Borowski	– Aleksandrów K.	1–38,48
Zbigniew Galias	– Kraków	36,75
Aleksander Surma	– Myszków	2–30,79
Dariusz Wilk	– Rzeszów	25,57
Przemysław Gadziński	– Środa Śląska	23,31
Przemysław Gworys	– Częstochowa	2–22,32
Jarosław Łazuka	– Warszawa	17,03
Paweł Perkowski	– Szczecin	2–13,02
Roman Wencel	– Komprachcice	11,60
Stanisław Świątek	– Kłodzko	11,12
Piotr Wasylczyk	– Warszawa	9,73
Sławomir Oszwałdowski	– Grudziądz	9,70
Andrzej Rostworowski	– Kraków	9,27

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 1993–1995 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 9 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już **44** punkty.

Pozostali członkowie **Klubu 44F** (alfabetycznie; liczby w nawiasach oznaczają wielokrotność przekroczenia **44** punktów): Piotr Bała (3), Anna Gluza (1), Wiesław Kacprzak (1), Jerzy Lipkowski (2), Dzierżysław Lipniacki (3), Bogusław Mikielewicz (1), Leszek Motyka (1), Roman Musiał (1), Andrzej Nowogrodzki (1), Tomasz Rawlik (1), Robert Repucha (1), Adam Sikorski (3), Jacek Stelmach (1), Leszek Szalast (1), Piotr Wach (1), Tomasz Wietecha (2).



Dwieście zadań! To znaczy sto numerów *Delty* albo dziesięć lat (uwzględniając przerwy wakacyjne). Piękny jubileusz obchodzi liga fizyczna w tym roku! Przypomnijmy: inauguracja nastąpiła w styczniu 1985 roku i do końca 1990 roku redagował ligę p. Andrzej Nadolny, po czym przejął ją obecny autor. W ciągu tego dziesięciolecia przewinęło się przez ligę ponad 220 uczestników, ale zaledwie 4 panie. Członków Klubu mamy obecnie dwudziestu, w tym trzech trzykrotnych, którzy uzyskali w ten sposób tytuł Weterana.

Niestety, w ciągu ostatnich lat otrzymujemy znacznie mniej listów niż początkowo. I choć najniższy poziom sprzed 2–3 lat został ostatnio nieco przekroczony, to wciąż ponad 10 rozwiązań w jednej serii zdarza się tylko wyjątkowo. Gorąco zapraszamy więc do udziału i spróbowania sił – przede wszystkim młodzież, ale też chętnie znów powitamy tych, którzy kiedyś już uczestniczyli w naszej zabawie, a potem się wycofali. W tym roku – jak Czytelnicy może zwrócili uwagę – odnotowaliśmy powrót do ligi po 7-letniej przerwie! Czekamy na pomysły nowych, oryginalnych i ciekawych zadań (za „kadencji" obecnego autora tylko jedno zadanie pochodziło od Czytelnika) – może ktoś zaprojektuje, na przykład, dalszy ciąg przygód inspektora Wnikliwego albo dr. Falsegranta? Prosimy też o uwagi krytyczne na temat organizacji ligi, zasad punktacji, doboru zadań, stopnia ich trudności i wszystkich innych kwestii mogących wpływać na atrakcyjność ligi fizycznej.

Przejdźmy teraz do omówienia ciekawszych zadań z ostatniego roku.

Zadanie **181.** [Naładowana powłoka kulista rozpryskuje się; znaleźć prędkość fragmentów] (współczynnik trudności $WT = 2{,}50$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 4$). Bezbłędne rozwiązania nadesłali **A. Rostworowski**, **A. Surma** i **S. Świątek**, a poprawne (obarczone tylko nieścisłością uzasadnienia) – **P. Gadziński**. Kilku Czytelników uwzględniło obok energii potencjalnej oddziaływania elektrostatycznego także energię oddziaływania grawitacyjnego! Hm… niby racja, rzeczywiście o tym nie pomyślałem… ale wpływ tej poprawki ujawniłby się tylko przy niezbyt realnych danych liczbowych. Częstym błędem było obliczanie energii potencjalnej powłoki ze wzoru $E_{\mathrm{pot}} = Q \cdot V$, z pominięciem czynnika $1/2$.

Zadanie **182.** [Udowodnić, że jeśli stała sprężystości sprężyny maleje ze wzrostem temperatury, to temperatura spada przy rozciąganiu adiabatycznym] ($WT = 3{,}78$, $LPR = 1$). Jest to typowy przykład tzw. związku krzyżowego, wynikającego z II zasady termodynamiki. Na poziomie akademickim istnieją standardowe techniki różniczkowe, pozwalające wyprowadzać związki między odpowiednimi pochodnymi cząstkowymi – ale trudno oczekiwać od naszych Czytelników znajomości takich specjalistycznych metod, dlatego dowód podany w *Delcie* 12/1994 był dłuższy i bardziej elementarny. Jedynym z uczestników ligi, który wziął się za bary z tym problemem, był **T. Wietecha**. Posłużył się on – skutecznie, choć nie bezbłędnie – zaawansowanym rachunkiem różniczkowym. Może należałoby unikać w przyszłości takich zadań, aby nie premiować Czytelników o wyższym od przeciętnego poziomie przygotowania? A może od czasu do czasu jednak zamieszczać zadanie, na którym pozostali nauczą się czegoś nowego?

Zadanie **186.** [Rozpędzanie się pociągu elektrycznego, gdy przewody trakcji elektrycznej mają opór] ($WT = 3{,}60$, $LPR = 0$). Czyżby sformułowanie zadania „pociąg rusza z maksymalnym przyspieszeniem" było niejasne? Rozwiązujący bezpodstawnie zakładali, że opór elektryczny lokomotywy pozostaje stały w czasie ruchu – gdyby tak było, to maksymalne, możliwe do osiągnięcia, przyspieszenie wystąpiłoby tylko raz w ciągu ruchu, a w innych chwilach byłoby mniejsze. Być może rzeczywiście było tu coś niedopowiedzianego i należało sprecyzować treść.

Zadanie **192.** [Podskok obręczy, do której jest przymocowana masa punktowa] ($WT = 3{,}44$, $LPR = 0$). Tutaj treść nie budziła wątpliwości, ale wyniki były również bardzo słabe. Tylko część rozwiązujących potrafiła prawidłowo zastosować zasadę zachowania energii, a prawdziwe „schody" zaczęły się przy sformułowaniu warunku oderwania się obręczy od podłoża. Jakiś elementarny błąd święci tu triumf: Czytelnicy „za dobrze" wiedzą o sile odśrodkowej, zapominając o tym, że siła bezwładności występuje również dla ruchu prostoliniowego. Przecież podskoczyć potrafi też zabawka, wewnątrz której ciężarek porusza się pionowo i o żadnej sile odśrodkowej nie ma mowy!

Zadanie **194.** [Pomiar prędkości nietoperza za pomocą dwóch mikrofonów; łączny sygnał pulsuje] ($WT = 1{,}53$, $LPR = 9$). Rozwiązanie wzorcowe polegało na wyliczeniu różnicy dróg od nietoperza do jednego i drugiego mikrofonu. Równoważną (i nieco szybszą) metodą było wykorzystanie standardowych wiadomości o zjawisku Dopplera i dudnieniach – tak postąpiła większość rozwiązujących. Zdarzał się tu jednak drobny błąd: częstotliwość pulsowania jest równa $f_{\mathrm{dud}} = f_1 - f_2$, a nie $(f_1 - f_2)/2$. Pozbawione tego błędu były wyniki **Z. Galiasa**, **A. Gawryszczaka**, **P. Gworysa**, **J. Koniecznego** i **A. Nowogrodzkiego**.

Zadania z matematyki nr 315, 316

Redaguje Marcin E. KUCZMA

315. Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$. Ile jest permutacji $\pi: \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, dla których nierówność $\pi(k) \geq k$ jest spełniona przez dokładnie dwie liczby $k \in \{1, \ldots, n\}$?

316. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające równanie funkcyjne
$$xf(x) - yf(y) = (x-y)f(x+y).$$

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1995

Przypominamy treść zadań:

307. Liczby dodatnie a, b, c spełniają nierówność
$$(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4).$$
Dowieść, że są one długościami boków pewnego trójkąta.

308. Dane są funkcje $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o następujących własnościach: f jest funkcją różniczkowalną, $f'(x) = g(f(x))$ dla $x \in \mathbf{R}$. Czy funkcja f musi być monotoniczna (niemalejąca lub nierosnąca)?

307. Teza zadania wynika z prostej do sprawdzenia tożsamości
$$(a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4) =$$
$$= (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c);$$
można bowiem przyjąć, że $a \leq b \leq c$; pierwsze trzy czynniki powyższego iloczynu są wówczas dodatnie, wobec czego także czwarty czynnik musi być dodatni – a to znaczy, że spełniony jest warunek trójkąta.

308. Wykażemy, że przy podanych założeniach funkcja f jest monotoniczna. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że dla pewnej trójki liczb $a < b < c$ zachodzą nierówności $f(a) < f(b) > f(c)$ lub $f(a) > f(b) < f(c)$; bez straty ogólności przyjmijmy pierwszy wariant. Możemy także bez straty ogólności założyć, że $f(a) \geq f(c)$ oraz że $f(b)$ jest maksymalną wartością funkcji f na przedziale $\langle a; c\rangle$. Niech α będzie największą liczbą w przedziale $\langle a; b)$, dla której $f(\alpha) = f(a)$; wówczas

(1) $$f(x) > f(\alpha) \qquad \text{dla} \quad x \in (\alpha; b\rangle.$$

W przedziale $(\alpha; b)$ istnieją punkty, w których pochodna f' jest dodatnia; niech u będzie jednym z tych punktów: $u \in (\alpha; b)$, $f'(u) > 0$. Oznaczmy wartość $f(u)$ przez λ. Zgodnie z (1)
$$\lambda = f(u) > f(\alpha) = f(a) \geq f(c).$$
Niech v będzie największą liczbą w przedziale $\langle u; b)$, dla której $f(v) = \lambda$, i niech w będzie najmniejszą liczbą w przedziale $(b; c)$, dla której $f(w) = \lambda$. Tak więc

(2) $$f(x) > \lambda \qquad \text{dla} \quad x \in (v; w).$$

W myśl warunku zadania liczby $f'(u)$, $f'(v)$, $f'(w)$ są równe (każda z nich równa się $g(\lambda)$). Ze spostrzeżenia (2) zaś wynika, że $f'(v) \geq 0$, $f'(w) \leq 0$. Stąd
$$f'(u) = f'(v) = f'(w) = 0$$
– wbrew wyborowi punktu u. Sprzeczność kończy dowód.

****

Jak każdy konkurs matematyczny, tak i nasza liga pragnie zaciekawiać biorących w niej udział, a przy okazji wszystkich Czytelników *Delty*, intrygującymi problemami matematycznymi. Cała reszta – regulamin, punkty, terminy, współczynniki trudności, magiczna liczba czterdzieści i cztery, drukowana co miesiąc czołówka, liczenie Weteranów – to tylko barwna oprawa... Traktujmy ją więc, jak na to zasługuje – jak zabawę. Bawią się przy tym zresztą nie tylko jej uczestnicy, ale i inni Czytelnicy, śledząc na przykład ruch nazwisk w „tabeli ligowej" i dziwując się od czasu do czasu. Czemuż to?

Jak wiadomo, żyjemy w kraju, gdzie list z miasta do miasta, ba – z jednego końca Warszawy na drugi – potrafi iść kilka godzin lub kilka miesięcy. Kolejka ligowa już opracowana, „WT" ustalone, punkty podliczone, czołówka wydrukowana, numer zamknięty, minęły tygodnie – a tu przychodzi list (nadany terminowo) z dobrym rozwiązaniem. Albo inaczej: prowadzący ligę z jakiegoś powodu zagląda do starej korespondencji i znajduje rozwiązanie, które ocenił był na „zero", bo nie zrozumiał wówczas argumentacji, całkiem – jak się okazuje przy ponownym czytaniu – poprawnej. (Nieomylność jest celem wzniosłym, ale nieosiągalnym.) W takiej sytuacji postępujemy jak w powieści Orwella: zmieniamy przeszłość. No, nie tak zupełnie: współczynników trudności już nie ruszamy, naliczonych punktów nikomu nie odbieramy – ale zasłużone punkty brakujące dopisujemy.

Takie ingerencje w przeszłość miały już miejsce kilkakrotnie; dla obserwatorów nie są one zazwyczaj zauważalne, bo rzadko kiedy zakłócenie punktacji narusza strefę drukowanej czołówki. Ale otóż właśnie niedawno coś takiego się zdarzyło: nazwisko jednego z uczestników wykonało na liście skok, jakiego, teoretycznie, wykonać nie miało prawa. Natychmiast zostało to dostrzeżone przez wiernych kibiców ligi. Jeden z nich nawet napisał do nas w tej sprawie. (Odpowiedzi listownej nie otrzymał, bo adresu nie podał, listu nie podpisał... Nawet *Delta* dostaje anonimy!)

Poplotkowawszy sobie o „sportowych" aspektach naszej zabawy, przejdźmy do matematyki. Uczestnicy ligi przysłali liczne ciekawe uwagi oraz uogólnienia rozważanych problemów, nie mówiąc już o rozwiązaniach metodami bardziej eleganckimi od naszych „firmowych". Oto krótki przegląd. Gdy zadanie zostało zrobione przez niewiele osób, podajemy ich nazwiska.

Zadanie **277.** [$a_0 = 1$, $a_{n+1} = (a_1 + \ldots + a_n)^{-1} - \sqrt{2} \Rightarrow$ szereg $\sum a_n$ jest zbieżny] (współczynnik trudności $WT = 3{,}46$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 4$). To zadanie było już omawiane przed rokiem (*Delta* 2/1995) – ale z pomyłką, wymagającą sprostowania: otóż poprawne rozwiązania przysłali: **P. Gadziński, T. Kulpa, P. Żmijewski** oraz **L. Skrzypek** – to ostatnie nazwisko zostało rok temu przeoczone.

Zadanie **285.** [Iloma sposobami można połączyć 10 punktów (rozróżnialnych), aby powstał spójny graf bez zamkniętych cykli (drzewo)?] ($WT = 3{,}29$; $LPR = 4$). Odpowiedź na analogiczne pytanie dla n punktów brzmi: n^{n-2}. Ten ogólny wynik podali Autorzy wszystkich prac ocenionych maksymalnie: **P. Gadziński** dochodzi do wzoru rekurencyjnego, jak w rozwiązaniu „firmowym", i wyprowadza wzór ogólny przez niełatwą indukcję; **T. Kulpa** stosuje zmyślne kodowanie badanych drzew ciągami długości $n-2$ o wyrazach ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$; oba te dowody są za długie, by je tu przytaczać. Zainteresowany Czytelnik znajdzie je, a także wiele innych metod, w książce: F. Harary, *A Seminar on Graph Theory*, Holt, Reinhart & Winston, New York 1967, s. 70–78 (rozdział: J. W. Moon, *Various Proofs of Cayley's Formula for Counting Trees*); taki odsyłacz podaje **L. Skrzypek**, wraz z informacją, że jest tam 10 różnych dowodów (!); natomiast **M. Matlęga** odsyła do książki: J. L. Kulikowski, *Zarys Teorii Grafów*, PWN 1986, tw. 9.1, s. 354.

Redaktor ligi zadaniowej wyraża szczerą skruchę z powodu tak niefortunnego wyboru zadania...

Zadanie **288.** [$a_n = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$; $\lim a_n^{1/n^2} = ?$] ($WT = 2{,}87$; $LPR = 6$ (10 ?)). Spośród sześciu bezbłędnych rozwiązań, pięć (**M. Kasperski, L. Skrzypek, P. Gadziński, T. Kulpa, P. Żmijewski**) opiera się na wzorze Stirlinga – tak jak rozwiązanie „firmowe" (dalsze cztery prace „zasadniczo poprawne", z użyciem wzoru Stirlinga lub własności całek, zawierają dość istotne luki). Szóste bezbłędne rozwiązanie, korzystające ze znacznie skromniejszych środków, przysłał **A. Dudek**, uczeń Technikum Samochodowego. Oto szkic (po adaptacji):

Ciąg o wyrazach $q_k = k!\mathrm{e}^{k-1}k^{-k}$ jest rosnący, a ciąg o wyrazach $r_k = k!\mathrm{e}^k(k-1)^{k-1}k^{-2k}$ jest malejący (aby się o tym przekonać, wystarczy zbadać ilorazy q_{k+1}/q_k oraz r_{k+1}/r_k); przy tym $r_2 < 1 < q_2$, więc dla wszystkich $k \geq 2$ zachodzą nierówności $r_k < 1 < q_k$, które można równoważnie zapisać tak:

$$\frac{(k-1)^{k-1}}{k^k}\mathrm{e}^k < \frac{k^k}{k!} < \mathrm{e}^{k-1}.$$

Ponadto (por. rozwiązanie „firmowe") zachodzi równość $\dfrac{a_k}{a_{k-1}} = \dfrac{k^k}{k!}$. Stąd $a_n = a_1 \prod_{k=2}^{n} \dfrac{a_k}{a_{k-1}} = \prod_{k=2}^{n} \dfrac{k^k}{k!}$ i z uzyskanych nierówności wynikają oszacowania:

$$a_n > \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)^{k-1}}{k^k}\mathrm{e}^k = n^{-n}\mathrm{e}^{2+\ldots+n} > n^{-n}\mathrm{e}^{n^2/2},$$

$$a_n < \prod_{k=2}^{n} \mathrm{e}^{k-1} = \mathrm{e}^{2+\ldots+(n-1)} < \mathrm{e}^{n^2/2},$$

które po podniesieniu stronami do potęgi $1/n^2$ dają, na mocy twierdzenia o trzech ciągach, wynik: $\lim a_n^{1/n^2} = \mathrm{e}^{1/2}$.

Zadanie **290.** [$a_n > 0$ dla $n \in \mathbf{N} \Rightarrow$ ciąg o wyrazach $b_n = ((1 + a_n)/a_{n-1})^n$ nie może mieć granicy mniejszej od e] ($WT = 2{,}64$; $LPR = 7$). Poprawne rozwiązania (**P. Gadziński, J. Olszewski, M. Sarniak, J. Witkowski, P. Żmijewski, L. Skrzypek, T. Wietecha**) nie różnią się istotnie od „firmowego". **J. Olszewski** uzyskuje tą samą metodą wynik nieco ogólniejszy: dla każdej liczby $k \in \mathbf{N}$

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{a_0 + a_{n+k}}{a_n}\right)^{n+1} \geq \mathrm{e}^k$$

i stawia problem (który przekazujemy Czytelnikom): czy liczba e^k jest tu najlepszym oszacowaniem dolnym? – oraz kończy pracę komentarzem: „Zadanie jest bardzo ciekawe, a wynik dość zaskakujący, bo przecież bardzo niewiele wiemy o ciągu (a_n)".

Zadanie **294.** [W każdym czworokącie wypukłym istnieje punkt, którego rzuty na boki (lub ich przedłużenia) leżą na okręgu] ($WT = 3{,}12$; $LPR = 4$). Rozwiązanie „firmowe" było oparte na argumencie „ciągłościowym": przy przemieszczaniu się punktu wzdłuż pewnej drogi wyznaczone przezeń kąty zmieniają się w sposób ciągły, więc przy pewnym położeniu itd. Nie jest to „czysta" geometria – własność Darboux należy raczej do analizy matematycznej. Dowody, które unikają stosowania takich metod, i przez to uchodzą za bardziej eleganckie, zostały wszelako znalezione przez uczestników ligi.

K. Patkowski rozumuje tak: W każdy czworokąt wypukły można wpisać elipsę; oznaczmy jej ogniska przez F_1, F_2, a środek odcinka F_1F_2 – przez O. Jeśli punkty Y_1, Y_2, Q są rzutami punktów F_1, F_2, O na prostą styczną do elipsy w punkcie X, to $\angle F_1XY_1 = \angle F_2XY_2 =: \alpha$. Zatem

$$|Y_1Y_2| = |XY_1| + |XY_2| = s \cdot \cos\alpha,$$

$$2|OQ| = |F_1Y_1| + |F_2Y_2| = s \cdot \sin\alpha,$$

gdzie $s = |F_1X| + |F_2X|$ jest wielkością stałą dla danej elipsy (niezależną od wyboru prostej stycznej); stąd

$$|OY_1|^2 = |OQ|^2 + |QY_1|^2 = (\tfrac{1}{2}s \cdot \sin\alpha)^2 + (\tfrac{1}{2}s \cdot \cos\alpha)^2 = \tfrac{1}{4}s^2,$$

czyli $|OY_1| = s/2$, i podobnie $|OY_2| = s/2$. Wniosek: rzuty każdego z ognisk na proste zawierające boki czworokąta leżą na okręgu o środku O i promieniu $s/2$. (To zgrabne rozwiązanie jest zgodne z intencją **Waldka Pompe**, Autora zadania.)

Inny dowód, także „czysto geometryczny", podają: **Nguyen Hung Son** oraz **K. Patkowski** (drugie rozwiązanie!). Dowody z użyciem ciągłości: **J. Witkowski** oraz **P. Gadziński**, który dodatkowo zauważa, że założenie wypukłości nie jest konieczne.

Zadanie **295.** [$T = \{1, \ldots, 3n\}$; $n \in \mathbf{N}$; znaleźć minimalną liczbę m o własności: $(\forall M \subset T)(|M| = m \Rightarrow \exists\, a, b \in M\colon n < a - b < 2n)$] ($WT = 2{,}03$; $LPR = 12$). Wielu uczestników wyłapało usterkę w sformułowaniu zadania: brak założenia, że $n \geq 2$ (dla $n = 1$ treść nie ma wiele sensu). Duże uogólnienie podaje **M. Lewandowski**: biorąc zbiór T postaci $T = \{t, t+1, \ldots, t+l\}$ oraz zastępując warunek $n < a - b < 2n$ warunkiem $p < a - b < q$ (gdzie $t, l, p, q \in \mathbf{Z}$, $t \geq 0$, $l \geq 2$, $0 \leq p < q \leq l$, $q - p \geq 2$) dowodzi, że minimalna liczba m o własności analogicznej do rozważanej w zadaniu wynosi

$$1 + \frac{l-r}{p+q}(p+1) + \min\{p+1,\ r+1\},$$

gdzie r jest resztą z dzielenia l przez $p+q$ (dowód długi).

Zadanie **297.** [Permutacja $(x_1, \ldots, x_{250})$ zbioru $\{1, \ldots, 250\}$ o własności: $x_{k+1} | (x_1 + \ldots + x_k)$, $k = 1, \ldots, 249$] ($WT = 2{,}46$; $LPR = 11$). Kilka osób podaje przykład z rozwiązania „firmowego":

$$(250,\ 2,\ 126,\ 3,\ 127,\ 4,\ 128,\ \ldots,\ 124,\ 248,\ 125,\ 249,\ 1);$$

większość znajduje permutację

$$(126,\ 1,\ 127,\ 2,\ 128,\ 3,\ \ldots,\ 250,\ 125);$$

T. Józefczyk podaje – oprócz tych dwóch – jeszcze przykład

$$(249,\ 1,\ 2,\ 126,\ 3,\ 127,\ 4,\ \ldots,\ 247,\ 124,\ 248,\ 250,\ 125);$$

wszyscy zauważają, że ich metoda „działa" dla permutacji zbioru $\{1, \ldots, n\}$ dla dowolnego n parzystego, a po drobnej modyfikacji – także dla n nieparzystego.

Zadanie **300**. [S – skończona suma przedziałów domkniętych, $f: S \to S$ – funkcja ciągła $\Rightarrow$ $(\exists\, A \subset S,\ \text{niepusty})(f(A) = A)$] ($WT = 2{,}06$; $LPR = 15$). Teza zadania jest elementarnym wariantem analogicznego twierdzenia, w którym S jest dowolną przestrzenią topologiczną zwartą (niekoniecznie podzbiorem prostej liczbowej). Oto dowód, który przedstawił **M. Lewandowski**:

Rodzina $\mathcal{R}$ zbiorów $T \subset S$ niepustych, domkniętych i takich, że $f(T) \subset T$, ma elementy minimalne w sensie relacji inkluzji (uzasadnienie: lemat Kuratowskiego–Zorna plus spostrzeżenie, że dowolny łańcuch w $\mathcal{R}$ jest rodziną scentrowaną zbiorów domkniętych); ponadto spełnia warunek: $T \in \mathcal{R} \Rightarrow f(T) \in \mathcal{R}$. Jeśli więc A jest dowolnym elementem minimalnym rodziny $\mathcal{R}$, to $f(A) = A$.

To samo uogólnienie uzyskali także **P. Gadziński** i **J. Witkowski**, a przy dodatkowych założeniach (metryczność, ciągowa zwartość, itp.): **J. Olszewski**, **P. Sołtan**, **Z. Sewartowski**.

Zadanie **301** [Wielomian $P(x) = \sum_{j=0}^{n+1} c_j x^j$ jest podzielny przez $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ (gdzie $c_{n+1} = a_n \neq 0$) $\Rightarrow$ $\max|a_k| \le (n+1)\max|c_j|$, ($WT = 2{,}03$; $LPR = 9$).

L. Skrzypek wykazuje, że podaną nierówność można wzmocnić do postaci

$$\max|a_k| \le |c_1| + |c_2| + \ldots + |c_n| + \max\{|c_0|, |c_{n+1}|\}$$

i zauważa, że rozumowanie jest słuszne także dla wielomianów o współczynnikach zespolonych (jeśli „podzielność” jest rozumiana jako podzielność w pierścieniu wielomianów nad $\mathbf{C}$).

Dalej Autor dowodzi następującego uogólnienia (dowód długi): jeżeli d jest dowolną stałą większą od $2/3$, to dla dostatecznie dużych $n \in \mathbf{N}$ założenia podane w treści zadania implikują oszacowanie

$$\max|a_k| \le d \cdot (n+1) \cdot \max|c_j|$$

– oraz wyraża przypuszczenie, że analogiczna implikacja zachodzi dla dowolnej stałej $d > 1/2$, zauważając jednocześnie, że nie zachodzi ona dla żadnej stałej $d < 1/2$, o czym świadczy przykład: $n = 2m-1$, $T(x) = x + x^2 + \ldots + x^m$,

$$P(x) = (x^m - 1)T(x) = (x-1)Q(x)$$

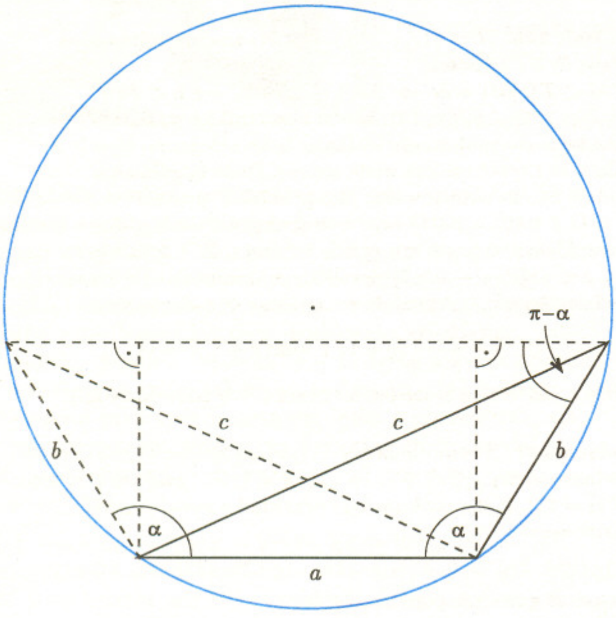
(w tym przypadku $\max|c_j| = 1$, natomiast $\max|a_k| = a_m = m = (n+1)/2$, co nietrudno sprawdzić). Kończąc pracę, Autor zapytuje o znane fakty z tej tematyki i ewentualne odsyłacze do literatury. Może ktoś z Czytelników...?

I jeszcze jedno. Jak zapewne zauważyli nie tylko Czytelnicy ligi, od pewnego czasu *Delta* ukazuje się na początku miesiąca, którego numer ma napisany na okładce. Dla ligi oznacza to, że (w szczególności) przerwa wakacyjna będzie w numerach 7 i 8. Napisaliśmy to w Regulaminie, ale tu o tym przypominamy.

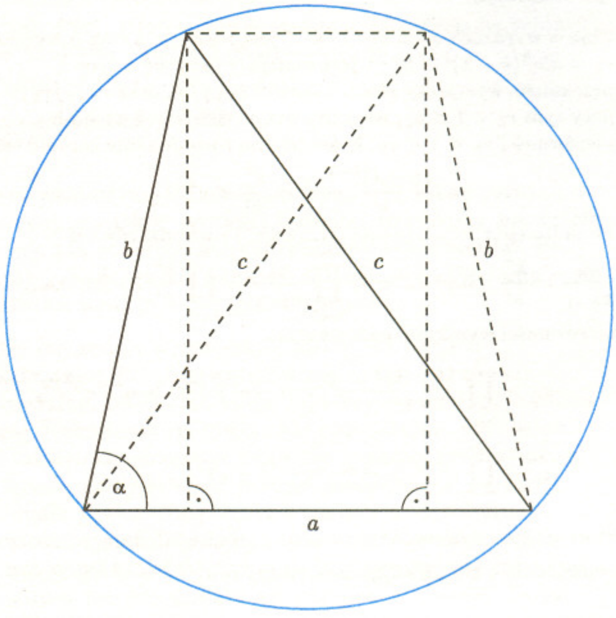
Matematyczne miniatury

Przykład 5

Z twierdzenia Ptolemeusza (*iloczyn długości przekątnych czworokąta wpisanego w okrąg jest równy sumie iloczynów długości boków przeciwległych*, patrz *Delta* 8/1993, 1/1995) wynika twierdzenie kosinusów. Wystarczy przeanalizować rysunki.



$$c \cdot c = b \cdot b + a(a + 2b \cdot \cos(\pi - \alpha))\,,$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos\alpha\,.$$



$$c \cdot c = b \cdot b + a(a - 2b \cdot \cos\alpha)\,,$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos\alpha\,.$$

W połączeniu z dowodem twierdzenia Ptolemeusza zamieszczonym w *Delcie* 8/1993 oznacza to, że twierdzenie Ptolemeusza i twierdzenie kosinusów są równoważne.

Ciąg dalszy w numerze 3/1996.