

Nagroda Nobla z fizyki w 1995 r.

Królewska Akademia Nauk Szwecji zdecydowała przyznać Nagrodę Nobla w 1995 r. dwóm fizykom amerykańskim za „pionierskie osiągnięcia doświadczalne w fizyce leptonów”. Nagrodę otrzymali Martin L. Perl z Uniwersytetu Stanforda za odkrycie leptonu τ i Frederick Reines z Uniwersytetu Kalifornijskiego w Irvine za bezpośrednią obserwację neutrin. Leptony są cząstkami elementarnymi, które biorą udział w oddziaływaniach słabych, odpowiedzialnych, na przykład, za rozpad β neutronu. Zaliczamy do nich: elektron, mion i lepton τ oraz ich neutrina. Neutrina są obojętne elektrycznie, natomiast elektrony, miony i taony (leptony τ) mają ładunek elektryczny równy -1 . Leptony naładowane biorą też udział w oddziaływaniach elektromagnetycznych. W oddziaływaniach słabych i elektromagnetycznych uczestniczą też kwarki, składniki protonu i neutronu, ale w odróżnieniu od leptonów biorą one też udział w oddziaływaniach jądrowych.

Neutrino zostało wprowadzone do fizyki w 1930 r. przez Wolfganga Pauliego, aby uratować w rozpadzie β jedno z najświętszych praw fizyki – zasadę zachowania energii. Na skutek tego rozpadu jądro atomowe wyrzuca elektron i przechodzi w inne jądro o ładunku o jedną jednostkę większym. Na przykład, neutron rozpada się na proton i elektron, innych cząstek w stanie końcowym się nie obserwuje. Jeśli rozpad β byłby dwuciałowy, to znaczy tylko z dwiema cząstkami w stanie końcowym, to energia elektronu powinna mieć ściśle określoną wartość. Doświadczalnie natomiast obserwuje się pewien rozkład energii od wartości zero do wartości maksymalnej równej wartości energii oczekiwanej dla rozpadu dwuciałowego. Albo więc zasada zachowania energii jest w tym procesie naruszona, albo w stanie końcowym jest więcej cząstek o bardzo małych masach, których się nie obserwuje. Pauli wybrał to drugie rozwiązanie. Wysunął hipotezę, że rozpad β jest trójciałowy: oprócz jądra – produktu rozpadu – i elektronu jest jeszcze emitowana neutralna elektrycznie, lekka cząstka, zwana obecnie antyneutrinem, która bardzo słabo oddziałuje z innymi cząstkami. Dlatego też nie mogła być zarejestrowana w rozpadzie β . Pauli wzdrygał się przed wprowadzeniem cząstki, która, według jego słów, nie mogła być odkryta doświadczalnie właśnie ze względu na słabość oddziaływań. Od strony teoretycznej hipoteza istnienia neutrina była natomiast bardzo atrakcyjna, gdyż pozwalała rozwiązać inne zagadki fizyki, na przykład bilans momentu pędu w tym rozpadzie. Korzystając z tej hipotezy Enrico Fermi sformułował model oddziaływań słabych opisujących, między innymi, rozpad β , z którego wynikało, iż do zaobserwowania neutrin powstających w rozpadach β naturalnych radioizotopów potrzeba tarczy o grubości kilku lat świetlnych. Dopiero zbudowanie reaktorów jądrowych, będących bardzo obfitym źródłem neutrin, pozwalało mieć nadzieję na ich obserwację doświadczalną.

W 1953 r. Frederick Reines i Clyde L. Cowan Jr. zaproponowali przeprowadzenie eksperymentu, w którym antyneutrino z reaktora powodowałyby reakcję antyneutrino + proton \rightarrow neutron + pozytron (odwrotny rozpad β). Pomimo bardzo dużej intensywności wiązki neutrin z reaktora liczba oczekiwanych przypadków powyższej reakcji była ciągle bardzo mała – kilka przypadków na godzinę. Dlatego, aby zmniejszyć ryzyko błędnej interpretacji wyników eksperymentu, Reines i Cowan postanowili rejestrować nie tylko pozytron, co jest stosunkowo łatwe, ale i neutron w stanie końcowym. Aparatura doświadczalna składała się z tarczy zawierającej około 400 litrów

Przygody matematyki wśród ludzi (III)

(na podstawie wykładów wygłoszonych na antenie *Radia Bis*)

Początek dzisiejszego świata

Marek KORDOS

Powszechnie przytaczane jest zdanie kanclerza Jana Zamoyskiego: *takie będą Rzeczypospolite, jakie ich młodzieży chowanie*. Zdanie to, wbrew potocznej opinii, nie jest wcale wezwaniem do podnoszenia jakości szkół, a jeśli nawet, to tylko pośrednio. Zamoyski stwierdza po prostu fakt, że jeśli wychowanie młodzieży będzie katolickie, to katolicka będzie Rzeczypospolita, a jeśli protestanckie, to protestancka. Było to zresztą w jego czasach stwierdzenie oczywiste – w pierwszej połowie XVI wieku wśród posłów do sejmu było ponad 30% protestantów, a wśród posłów z Małopolski nawet ponad 60%.

Taki stan rzeczy był wynikiem uruchomienia przez protestantów (w Polsce głównie kalwinów, arian – jak ich nazywano) znacznie nowocześniejszej i sprawniejszej sieci szkół. Protestanci byli w wyniku tego znacznie lepiej wykształceni.

Przypomnijmy – otwarty ruch protestancki rozpoczął się wystąpieniem Martina Lutera 31 października 1517 roku; potem była już lawina protestu przeciw przestarzałej i skorumpowanej strukturze kościoła katolickiego. Jego odpowiedzią był sobór trydencki (1543–1563), który postanowił zaangażować kościół głębiej w życie wiernych (np. ustanowił sakrament małżeństwa), a w szczególności nakazał najwyższą wagę przywiązywać do kształcenia młodzieży. Uznano też dopiero co powstały (1540), założony przez Ignacego Loyolę zakon jezuitów, który brał na siebie obowiązek obrony kościoła, a zwłaszcza troskę o wykształcenie młodego pokolenia. Dziś, gdy trwa w Polsce walka o kształt oświaty, musimy pamiętać, że podobny bój został już raz – w XVI wieku – stoczony.

Data rozpoczęcia soboru trydenckiego jest również datą ukazania się dzieła *O obrotach ciał niebieskich* Mikołaja Kopernika. Trudno o zrobienie czegoś

bardziej nie w porę. W całej Europie płoną stosy z protestantami (inkwizycja), ale i z katolikami (Anglia, Henryk VIII, Elżbieta I). I w takiej chwili ktoś (mniejsza o to, że ksiądz; zresztą Luter też był duchownym katolickim) proponuje restrukturyzację poglądów na budowę Wszechświata. Co za wspaniała okazja, by wpisać w to pomysły na restrukturyzację kościoła, państwa i co by tylko kto zechciał. Giordano Bruno, który spłonął na stosie za ideę Kopernika, nie miał pojęcia o astronomii.

Idea Kopernika nie była jedynym *novum*, z którego wykiełkował nowy sposób pojmowania świata. Reformacji towarzyszy znaczne powiększenie świata poprzez odkrycia geograficzne: 1492 rok to odkrycie Ameryki, 1498 – to opłynięcie Afryki i dotarcie drogą morską do Indii, 1521 – to opłynięcie kuli ziemskiej dookoła. Świat powiększył się zresztą w bardziej zasadniczy sposób. Galileusz w 1609 roku skonstruował teleskop pozwalający stwierdzić, że na Księżycu są góry, a na Słońcu plamy i – co wywołało największą sensację – że Jowisz jest obiegany przez cztery duże ciała niebieskie (nazwane przez niego gwiazdami Medycejskimi). Słowem, na Ziemi się wszystko nie kończy. Ale świat powiększył się jeszcze w jedną stronę – Holender Leeuwenhoek, bracia Jensenowie (Flamandowie) i Anglik Hooke konstruują mikroskop i stwierdzają, że tam, gdzie nic już nie ma – na przykład w kropli czystej wody – żyje mrowie rozmaitych stworzeń (nazywano je, nawet jeszcze w czasach, gdy kończyłem szkołę, wymoczkami).

Za tym wszystkim stała matematyka, a konkretnie rachunki. XV i XVI wiek to zmaganie się wszystkich praktycznie uczonych z problemem uciążliwości rachunków. Dzisiejsi Czytelnicy *Delty* zapewne nie w pełni mogą zrozumieć, o co chodzi – mają przecież do dyspozycji kalkulatory (z którymi każdy przecież sobie poradzi) i komputery (też coraz bardziej dające się ujarzmić). Przeprowadzenie rachunków, choćby takich, by zestawić tablice efemeryd (czyli tych zjawisk na niebie, które nie powtarzają się w rytmie dobowym bądź rocznym, a które w owych czasach były niezbędne do mniej więcej świadomej nawigacji) wymagało nieprawdopodobnie żmudnej i długotrwałej pracy, jeśli trzeba ją było wykonać, jak to się mówi „ręcznie”. Wymyślono cały szereg dziś już zupełnie zapomnianych technik. Kto dzisiaj potrafiłby np. mnożyć za pomocą tablicy kwadratów liczb?

wodnego roztworu chlorku kadmu, umieszczonej między dwoma licznikami scyntylacyjnymi do rejestracji fotonów. Wyemitowany pozytron w odwrotnym procesie β jest spowalniany przez wodę i anihiluje z elektronem z tarczy, co prowadzi do emisji dwóch charakterystycznych fotonów rejestrowanych jednocześnie przez detektory. Neutron też jest spowalniany i po kilku milisekundach jest wychwytywany przez jądro kadmu, czemu też towarzyszy emisja fotonu. Rejestracja trzech fotonów w odpowiedniej sekwencji czasowej dostarczała więc dowodu na to, że w tarczy zaszło oddziaływanie antyneutrino z protonem. Pozytywny wynik eksperymentu Reinesa i Cowana, przeprowadzonego przy reaktorze Savannah River, udowodnił po raz pierwszy, że neutrino jest obiektywnie istniejącą cząstką elementarną, a nie wymysłem umysłu ludzkiego dla, li tylko, ratowania zasad zachowania.

Neutrino w rozpadzie β towarzyszy zawsze elektronowi. W latach sześćdziesiątych stwierdzono, że mionowi (cząstce bardzo podobnej do elektronu, ale około 200 razy cięższej) towarzyszy inny rodzaj neutrino, który dla odróżnienia od elektronowego nazwany został neutrinem mionowym. Na początku lat siedemdziesiątych stwierdzono, że cząstki elementarne można poklasyfikować w dwie rodziny. Pierwsza rodzina składałaby się z dwóch leptonów – elektronu i neutrino elektronowego, i dwóch kwarków, zwanych górnym i dolnym (ang. up i down). Z kwarków górnych i dolnych zbudowane są protony i neutrony, składniki jąder atomowych. A więc w zasadzie wystarczałyby jedna rodzina cząstek do wytłumaczenia budowy materii we Wszechświecie. Druga rodzina składa się też z dwóch leptonów – mionu i neutrino mionowego, i dwóch kwarków – dziwnego i powabnego (ang. strange i charm). Kwark dziwny jest potrzebny do wytłumaczenia budowy cząstek dziwnych – kaonów, barionów lambda, sigma itp., które szybko rozpadają się na cząstki nie zawierające kwarku dziwnego. Kwark powabny, którego odkrycie w 1974 r. zostało uhonorowane Nagrodą Nobla, uzupełniał skład drugiej rodziny. I taki skład cząstek elementarnych też by wystarczył.

Fakt, że w każdej rodzinie istnieje jeden naładowany lepton (elektron w pierwszej, mion w drugiej), skłaniał fizyków do poszukiwania nowych leptonów. Takie poszukiwania, w których uczestniczył również Martin Perl, były prowadzone w latach sześćdziesiątych, ale wyniki były negatywne. W 1973 r. w Laboratorium SLAC uruchomiono nowe urządzenie SPEAR (zderzające elektrony z pozytronami) otwierające przed łowcami nowych cząstek nowe możliwości. Urządzenie SPEAR było szczególnie przydatne do poszukiwań nowych cząstek, które mogą być produkowane w reakcji elektron + pozytron \rightarrow cząstka + antycząstka. Pierwszym, bardzo istotnym odkryciem, było stwierdzenie istnienia kwarku powabnego, o którym już wspominaliśmy. Z kolei w eksperymencie kierowanym przez M. Perla zaobserwowano już w pierwszym roku od uruchomienia SPEAR kilkadziesiąt przypadków typu elektron + pozytron \rightarrow (elektron + antymion) lub (antyelektron + mion). W obu typach reakcji brakowało energii w stanie końcowym. Jedną z możliwych interpretacji tych przypadków opierała się na hipotezie istnienia nowego, ciężkiego leptonu, nazwanego τ , rozpadającego się szybko na elektron (lub mion) i parę neutrin, które nie są rejestrowane. A więc reakcja mogłaby przebiegać następująco: elektron i pozytron anihilują w parę leptonów τ , które rozpadają się na obserwowane leptony, a towarzyszące im neutrino unoszą brakującą energię. Hipoteza ta była następnie sprawdzana w innych obserwacjach przez kilka lat.

Lepton τ był zwiastunem nowej rodziny cząstek elementarnych. Wkrótce potem odkryto piąty kwark, nazwany pięknym (ang. bottom lub beauty), a na odkrycie jego partnera – kwarku szczytowego (ang. top) musieliśmy czekać aż do ubiegłego roku. Do kompletu trzeciej rodziny brakuje jeszcze neutrino taonowego, którego bezpośrednio jeszcze nie zaobserwowano, chociaż mamy pośrednie dowody jego istnienia.

Tak więc mamy trzy rodziny cząstek elementarnych. Nie jest to jednak proste powielanie się Przyrody. Przy przejściu w modelu cząstek elementarnych od dwóch do trzech rodzin pojawia się istotny nowy element jakościowy, który pozwala wytłumaczyć fakt łamania symetrii kombinowanej CP – symetrii odbicia przestrzennego i sprzężenia cząstka-antycząstka. Ale to już całkiem inna historia.

Jan KALINOWSKI

Patrz w niebo

Aby statek kosmiczny mógł dotrzeć do dalszych planet w miarę szybko i tanio, stosowano już wielokrotnie metodę grawitacyjnego rozpędzania go przy zbliżeniach do kolejnych planet. Korzyść była z tego oczywista: wystarczyło zużyć tylko tyle energii, by statek dotarł do pierwszej planety (zawsze był nią Jowisz), a potem, niejako już przy okazji, odwiedzone były niemal wszystkie dalsze, bo każda planeta kierowała statek ku następnej. Co prawda, wymagało to ogromnej precyzji przy wyborze trasy lotu sondy i sprzyjającego ustawienia planet. Tak wykonały swoje misje oba Pioneerzy i oba Voyagery.

Wszystkie te cztery loty odbyły się, oczywiście, w płaszczyźnie ekliptyki. W 1990 r. z pokładu wahadłowca Discovery wystrzelono ku Jowiszowi sondę Ulysses zbudowaną wspólnymi siłami NASA i ESA (European Space Agency). Sonda ta po przelocie koło Jowisza miała wejść na orbitę prostopadłą do płaszczyzny ekliptyki, tak by przy obiegu Słońca mogła przelatywać nad jego biegunami. Najbliżej Jowisza Ulysses znalazł się 8 II 1992 r. (w odległości 380 000 km nad powierzchnią jowiszowych chmur) i tak rozpoczęły się badania nietkniętych jeszcze ludzkim przyrządem obszarów Układu Słonecznego. Całe wydarzenie było znacznie słabiej nagłośnione niż wyprawy Pioneerów i Voyagerów – zrozumiałe, eksperymenty takie już spowszedniały.

Tak więc swoją misję okołosłoneczną Ulysses rozpoczął od przebycia magnetosfery Jowisza w kierunku południkowym. Jej granicę wyczuł sześć dni wcześniej w odległości około 8 mln km od planety, tj. znacznie dalej, niż było to w przypadku Voyagerów. Przyczyną takich zmian magnetosfery jest Słońce, mianowicie słaby – podczas lotu Ulyssesa – wiatr słoneczny pozwolił magnetosferze Jowisza swobodnie rozprężyć się do zwiększonych rozmiarów.

Ulysses potwierdził, że Io, najbliższy planecie z satelitów galileuszowych, jest głównym źródłem jonów wypełniających jowiszową magnetosferę. Wulkany tego satelity wyrzucają w przestrzeń tonę dwutlenku siarki i innych gazów na sekundę. Gazy te ulegają szybko jonizacji tworząc na orbicie Io gruby torus plazmy. Torus ten był jednak rzadszy niż za czasów Voyagerów, co dowodziłoby, że aktywność wulkaniczna Io spadła w ostatnich latach. Jony siarki i tlenu Ulysses rejestrował nie tylko w płaszczyźnie orbity Io, lecz – w odpowiednio mniejszym stężeniu – w całym obszarze magnetosfery. Potwierdziło się też, że jony te zbiegają ku biegunom planety wywołując tam zorze dostrzegalne nawet przez teleskop Hubble'a z okołosłonecznej orbity.

W sumie, choć Jowisz nie był głównym obiektem badań Ulyssesa, wyprawa sondy już na samym początku przyniosła szereg danych, wprawdzie nie odkrywających, lecz dających naszej wiedzy o Jowiszu solidniejsze podstawy.

Tomasz KWAST

Albo za pomocą tablic funkcji trygonometrycznych? Były to jednak bardzo dobre metody, umożliwiające niesłychany skok do przodu w omawianych stuleciach.

Wynalazki te wielokrotnie wynaleziony (kiedyż by indziej) około 1440 roku druk. Możliwość powielenia informacji w wielu egzemplarzach natychmiast owocowała informacją tej upowszechnieniem. Zaczyna być faktem, że uczeni – nawet w odległych krajach – pracują razem.

Radykalną zmianę sytuacji przynosi wynalazek Burgiego-Nepera-Briggsa-Güntera, czyli logarytmy. Jest to pomysł na to, jak wykonywać mnożenie i dzielenie wielu liczb równocześnie (tak, jak równocześnie dodaje się „w słupku”). Szwajcarski rachmistrz, szkocki lord i angielski matematyk stworzyli metodę, która najwięcej dała ludzkiej cywilizacji. A do tego czwarty z wymienionych – Edmund Günter – skonstruował bajecznie prosty przyrząd realizujący tę metodę: suwak logarytmiczny. Te dwie, przesuwające się względem siebie, deseczki to przyrząd, który dał ludziom parę, elektryczność, samochody, samoloty, radio, telewizję, tranzystor. Słowem – długo jeszcze komputery będą musiały popracować, by mieć takie zasługi, jak te skromne dwie deseczki. Drodzy Czytelnicy: poznajcie choćby jeden suwak logarytmiczny w swoim życiu – jest to na pewno większy bohater ludzkości od każdego z wodzów czy królów.

Gdy ludzkość uzyskała już swobodny dostęp do *Rechenhaftigkeit* – rachunkowej gwarancji przeprowadzanych rozumowań, dla pełnego przełomu potrzebne już było jedynie zerwanie z dotychczasową praktyką nauki, czyli z uniwersytetami. Dokonali tego – co może być zaskoczeniem – oficerowie (będzie mowa jeszcze o jednej interwencji armii w naukę, ale to następnym razem). Byli to oficerowie armii wyzwoleniczych. Trzeba bowiem przypomnieć sobie, że Europa przełomu XV i XVI wieku to Europa podzielona między dwa supermocarstwa: Hiszpanię, której potęgą opierała się na złocie, i Polskę, której potęgą miała swe źródło w zbożu. Hiszpania rządziła Włochami, Austrią, Francją, Anglią (czasów Krwawej Mary), Holandią; Polska (wraz z Litwą) – Węgrami, Czechami, Szwecją, Rosją, Prusami, a razem utrzymywały te potęgi między sobą łańcuszek podzielonych państweczek niemieckich. W wieku XVII sytuacja jest już skrajnie inna

- to nowo powstałe (jak Prusy) bądź wyzwolone (jak Francja) państwa dyktują warunki. I ci prężni ludzie, którzy wywalczyli dla nich wolność, również układają podwaliny nowej nauki.

Czasem przesadzają, mówią np. *dowody były potrzebne takim mięczakom, jak Grecy; my się dziś bez nich swobodnie obywamy.* Ale formują praktycznie wszystkie gałęzie nauki, jakie my dziś uprawiamy. Powstaje fizyka (Galileusz, Newton), chemia (Boyle), biologia, fizjologia itd., itp.

Oto przykłady. Robert Hooke stwierdził, że gdy potrząsnemy naczyniem z suchym równoziarnistym piaskiem, to zachowuje się on jak płyn - cięższe od piasku przedmioty w nim toną, lżejsze wypływają na powierzchnię, można też skonstruować pływające po takim piasku żaglowce. Jego wniosek: woda i inne płyny to bezustannie drgające jednakowe kuleczki. Tak powstała kinetyczno-molekularna teoria budowy materii.

Inny przykład. Samuel Pepys z kolegami (można o tym przeczytać w jego, dostępnych po polsku, pamiętnikach) u szeryfa Londynu uzyskali prawo do przeprowadzenia na ochotnika (spośród skazanych na śmierć) eksperymentu polegającego na przetoczeniu mu litra krwi owczej (i równoczesnym upuszczeniu mu litra jego własnej krwi) - w przypadku powodzenia miał zostać uwolniony i otrzymać sztukę złota, co zresztą się stało. Jak długo żył - nie wiadomo, bo natychmiast się ulotnił.

Wymieniony przed chwilą Samuel Pepys był później prezesem Royal Society, angielskiej Akademii Nauk. Tak bowiem - Akademiami Nauk - nazywają się instytucje naukowe, które nowi ludzie nauki powołali do walki ze skostniałymi uniwersytetami. Royal Society powstało w 1655 roku, Akademia Paryska w 1666; najstarsza jest neapolitańska Accademia dei Lincei z 1560 roku (rzymska powstała 43 lata później). Zgoda między Akademiami i Uniwersytetami zapanowała dopiero w XIX wieku.

Samuel Pepys jest też osobą, która wyraziła zgodę na opublikowanie w 1687 roku dzieła powszechnie uznanego za najdonioślejsze dla XVII stulecia: *Philosophiae naturalis principia mathematica*, dzieła, w którym wyłożone są zasady dynamiki i udowodnione jest prawo powszechnego ciężenia. Rezultat znacznie bardziej obrazoburczy od prac Kopernika - jest tu jasno powiedziane, że na Ziemi i w Niebie obowiązuje ta sama fizyka.



Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 765. Udowodnić, że funkcja $f(x) = x^2$ nie jest sumą dwóch funkcji okresowych.

(Zadanie zaproponował Jarosław Wróblewski.)

Rozwiązanie na str. 15

M 766. Niech n będzie liczbą naturalną większą od 1, a $\varepsilon_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$. Udowodnić, że

$$1 + \varepsilon_n + \varepsilon_n^2 + \dots + \varepsilon_n^{k-1} = 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy n jest dzielnikiem k .

Rozwiązanie na str. 15

M 767. Prostopadłościenne pudło o wymiarach $A \times B \times C$ wypełniono jednakowymi prostopadłościanami o wymiarach $a \times b \times c$. Wiedząc, że liczby A, B, C, a, b, c są naturalne, udowodnić, że a dzieli którąś z liczb A, B, C .

Rozwiązanie na str. 8

Redaguje Krzysztof REJMER

F 423. Jednorodna nierozciągliwa nić o gęstości liniowej ρ wisi w równowadze na gładkim pręcie. W pewnej chwili nić zaczyna się zsuwać z pręta. Znaleźć jej prędkość w chwili, gdy oderwie się od pręta. Zaniedbujemy średnicę pręta i grubość nici.

Rozwiązanie na str. 11

F 424. Jak wygląda ruch liny z poprzedniego zadania, kiedy oderwie się ona już od pręta? W jakim czasie lina wyprostuje się? Jakie będą w tym momencie położenia jej końców oraz prędkość?

Rozwiązanie na str. 16

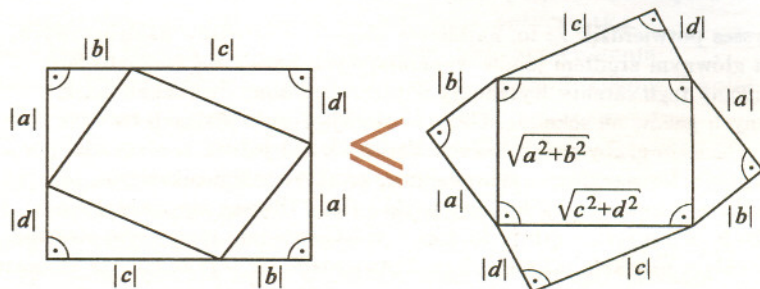
Matematyczne miniatury

Kluczem do wielu własności płaszczyzny euklidesowej jest nierówność Cauchy'ego-Schwarza: dla rzeczywistych a, b, c, d

$$|a \cdot c + b \cdot d| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$$

(inna wersja: $|(a, b) \circ (c, d)| \leq \|(a, b)\| \cdot \|(c, d)\|$, gdzie symbol \circ oznacza iloczyn skalarny, $\| \cdot \|$ długość wektora o danych współrzędnych).

Ponieważ wśród równoległoboków o ustalonych bokach największe pole ma prostokąt, to zgodnie z rysunkiem mamy



$$(|a| + |d|) \cdot (|c| + |b|) \leq 2 \cdot \frac{1}{2} (|a| \cdot |b| + |c| \cdot |d|) + \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2},$$

$$|a \cdot c + b \cdot d| \leq |a| \cdot |c| + |b| \cdot |d| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}.$$

Jarosław GÓRNICKI

O pewnej sprytniej metodzie, I

Niech P będzie niepustym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych i funkcja $f: P \rightarrow \mathbf{R}$ spełnia warunek $f(x) \geq 0$ dla każdego $x \in P$. Jeżeli liczby x_1, \dots, x_n należą do P , to $f(x_1) + \dots + f(x_n) \geq 0$.

To oczywiste stwierdzenie może stać się cennym narzędziem do rozwiązania niektórych, czasami niełatwych, zadań olimpijskich. Cała trudność w tego typu zadaniach polega jedynie na sprytnym dobraniu funkcji f (stąd tytuł). Zaczniemy od następującego przykładu:

1. Wyznaczyć wszystkie ciągi (x_1, \dots, x_n) liczb rzeczywistych, dla których

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3} = \sqrt[4]{x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4}.$$

Rozwiązanie. Niech $a = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Rozpatrzmy funkcję $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ daną wzorem $f(x) = x^2(x - a)^2$. Załóżmy, że (x_1, \dots, x_n) jest pewnym ciągiem liczb rzeczywistych spełniającym dane równości. Ponieważ $f(x) \geq 0$ dla każdego rzeczywistego x , więc również $f(x_i) \geq 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\begin{aligned} \text{Mamy: } \sum_{i=1}^n f(x_i) &= \sum_{i=1}^n (x_i^4 - 2ax_i^3 + a^2x_i^2) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^4 - 2a \sum_{i=1}^n x_i^3 + a^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \\ &= a^4 - 2a \cdot a^3 + a^2 \cdot a^2 = 0. \end{aligned}$$

Zatem suma liczb nieujemnych $f(x_1), \dots, f(x_n)$ wynosi 0, a to możliwe jest jedynie wtedy, gdy każda z liczb $f(x_1), \dots, f(x_n)$ równa się 0. A ponieważ wielomian f ma tylko dwa pierwiastki: 0 i a , więc $x_i = 0$ lub $x_i = a$ dla $i = 1, \dots, n$. Stąd łatwo dostajemy, że każde rozwiązanie w liczbach rzeczywistych danego układu ma postać: $x_i = p$, $x_j = 0$ dla każdego j różnego od i , gdzie p jest dowolną liczbą dodatnią.

2. Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne $n \geq 2$, że nierówność

$$(*) \quad a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$$

zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych

$$a_1, a_2, \dots, a_n.$$

Rozwiązanie. Ustalmy $n \in \mathbf{N}$ i weźmy funkcję $f(x) = x^2 - a_n x + a_n^2 / (n-1)$. Jeśli dla dowolnej liczby rzeczywistej a_n trójmian f ma co najwyżej jeden pierwiastek rzeczywisty, to dla dowolnych liczb rzeczywistych a_1, \dots, a_{n-1} jest $f(a_1) + \dots + f(a_{n-1}) \geq 0$, czyli $a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 \geq a_n(a_1 + \dots + a_{n-1})$. Jeśli dla pewnego rzeczywistego a_n trójmian f ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, powiedzmy α i β ($\alpha < \beta$), to dla dowolnych liczb rzeczywistych $b_1, \dots, b_{n-1} \in (\alpha, \beta)$ jest $f(b_1) + \dots + f(b_{n-1}) < 0$, co jest równoważne nierówności $b_1^2 + \dots + b_{n-1}^2 + a_n^2 < a_n(b_1 + \dots + b_{n-1})$.

Wszystkie hierarchie kościelne odnotowały, że jest to sprzeczne z ich doktryną (inna sprawa, czy jest to pogląd słuszny). I co? I nic. Starcia religijne i tworzenie nowej mapy politycznej już zostały zakończone. Nie było warto rozniecać nowych stosów z powodu jakiegos tam wyniku naukowego.

Ta różnica między losami rezultatu Kopernika i Newtona jest chyba dostatecznie jaskrawym dowodem dla każdego, kto chciałby wątpić w ścisły związek nauki z polityką. Mówię o tym, bo takich pięknoduchów ciągle się jednak spotyka.

Nowy wzorzec nauki, stworzony w XVII wieku, obowiązywał co najmniej do końca XIX stulecia. A czy obowiązuje dziś? Wiele wskazuje na to, że nie. Trudno jednak jest wyrokować kategorycznie, póki nie zrozumie się istoty nowej propozycji. A ja, niestety, na razie zobaczyć jej nie umiem.

Tak więc wtedy nierówność (*) nie jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych. Liczby b_1, \dots, b_{n-1}, a_n stanowią kontrprzykład! Udowodniliśmy w ten sposób, że nierówność (*) zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych a_1, \dots, a_n wtedy i tylko wtedy, gdy trójmian kwadratowy f ma co najwyżej jeden pierwiastek rzeczywisty. Jeszcze tylko formalność: obliczenie „delty” i zbadanie jej znaku, co pozostawiamy Czytelnikowi.

Jakie funkcje należy dobrać, aby rozwiązać poniższe zadania?

3. Wyznaczyć wszystkie ciągi (x_1, \dots, x_n) liczb rzeczywistych spełniające równanie:

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3}.$$

4. Dane są liczby rzeczywiste x_1, \dots, x_n o sumie równej 0. Niech m będzie najmniejszą, M zaś największą z tych liczb. Dowieść, że $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq -nmM$.

5. Liczby rzeczywiste x_1, \dots, x_n spełniają warunki: $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$. Udowodnić, że spośród tych liczb można wybrać dwie, których iloczyn jest nie większy niż $-1/n$.

6. Niech $n \geq 4$. Różne liczby rzeczywiste x_1, \dots, x_n spełniają warunki: $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$. Udowodnić, że spośród tych liczb można wybrać takie cztery różne liczby a, b, c, d , że

$$a + b + c + nabc \leq \sum_{i=1}^n x_i^3 \leq a + b + d + nabd.$$

Krzysztof CHEŁMIŃSKI, Waldemar POMPE