Funkcja zeta Riemanna, część II – hipoteza Riemanna

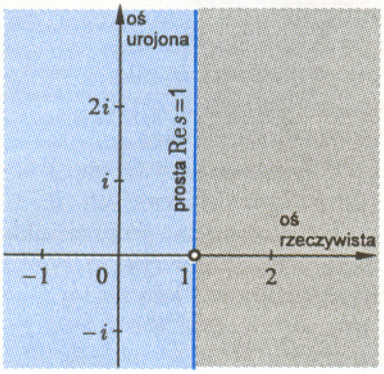
Roman DWILEWICZ i Ján MINÁČ

1. Przypomnienie

Dla przypomnienia, w pierwszej części tego artykułu zdefiniowaliśmy funkcję zeta Riemanna $\zeta = \zeta(s)$ następującymi wzorami:

$$
\begin{aligned}
\zeta(s) &= \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \text{lub równoważnie} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{3^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{5^s}\right)^{-1} \cdots = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},
\end{aligned} \tag{1}
$$

gdzie iloczyn nieskończony jest po wszystkich liczbach pierwszych. Choć powyższe wzory mają sens tylko dla $s = a + ib$ z półpłaszczyzny $a = \operatorname{Re} s > 1$, to jednak funkcja zeta może być analitycznie przedłużona na całą płaszczyznę zespoloną $\mathbf{C}$ z wyjątkiem 1 (patrz rys. 1). Wiemy też, że funkcja analityczna zespolona f lokalnie w otoczeniu punktu z_0 może być przedstawiona jako suma szeregu potęgowego $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, gdzie $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$. Jej przedłużenie analityczne definiowaliśmy używając takich przedstawień.



Rys. 1

2. Dziwne wzory na sumy szeregów rozbieżnych

Fakt, że funkcja $\zeta(s)$ jest dobrze zdefiniowana na $\mathbf{C}$ oprócz 1, może być wykorzystany do nadania „sensu” pewnym szeregom rozbieżnym i podania wartości ich „sum”. Na przykład formalnie w (1) możemy wstawić $s = 0$, $s = -1$ lub $s = -2$. Oczywiście, patrząc bezpośrednio na szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ lub $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2$ nie możemy powiedzieć, że ich sumy są skończone, bo każdy widzi, że są nieskończone.

Natomiast gdy spojrzymy na sumy powyższych szeregów jako na wartości $\zeta(0) = -1/2$, $\zeta(-1) = -1/12$ czy $\zeta(-2) = 0$, możemy „powiedzieć”, że

$$
\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \zeta(0) = -\frac{1}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n = \zeta(-1) = -\frac{1}{12}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 = \zeta(-2) = 0,
$$

co jest nieco zaskakujące. W ten sposób patrzył na niektóre szeregi rozbieżne już Euler. Prawie dwieście lat później odkrył to na nowo matematyk hinduski Ramanujan (1887–1920), czym poruszył wielu mu współczesnych.

3. Niektóre fascynujące wartości funkcji zeta

Jak widać, problem wartości funkcji zeta jest dość ważny. Niestety, dla niewielu argumentów s znane są wzory na $\zeta(s)$. Najbardziej znane są wartości, które podał już Euler:

$$
\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90},
$$

$$
\zeta(6) = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \ldots = \frac{\pi^6}{945}, \qquad \zeta(8) = \frac{1}{1^8} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \ldots = \frac{\pi^8}{9450},
$$

lub ogólniej $\zeta(2k) = (-1)^{k+1} 2^{2k-1} \pi^{2k} \frac{B_{2k}}{(2k)!}$, dla $k = 1, 2, \ldots$, gdzie B_j są tzw. liczbami Bernoulliego (zob. margines). Ponadto mamy

$$
\zeta(-2k) = 0, \quad \zeta(1 - 2k) = \frac{(-1)^k B_{2k}}{2k}, \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots
$$

Okazuje się, że wartości funkcji zeta w punktach $0, -1, -2, \ldots$ mogą być otrzymane w inny ciekawy sposób (patrz [M]). Mianowicie, żeby otrzymać np. $\zeta(0)$, bierzemy sumę pierwszych $x - 1$ składników w (1) dla $s = 0$, czyli $1 + 1 + \ldots + 1$ wzięte $x - 1$ razy, co daje właśnie $x - 1$, traktujemy tę sumę jako funkcję zmiennej rzeczywistej x i całkujemy od 0 do 1, dostając $\int\limits_0^1 (x - 1)\,\mathrm{d}x = -1/2$. Podobnie dla $\zeta(-1)$, bierzemy sumę pierwszych $x - 1$

Dobrze znane są wzory na sumę kolejnych liczb naturalnych czy sumę ich kwadratów:

$$
1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2},
$$

$$
1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.
$$

Szwajcarski matematyk Jacob Bernoulli (1654–1705) postawił sobie za cel znalezienie ogólnego wzoru na sumę k-tych potęg kolejnych liczb naturalnych dla $k = 0, 1, 2, \ldots$ Doprowadziło go to w naturalny sposób do pewnego ciągu liczb wymiernych B_k, nazwanych później jego imieniem. Okazuje się, że

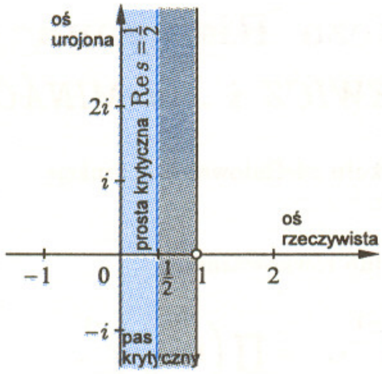
$$
1^k + 2^k + \ldots + (n-1)^k = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j},
$$

gdzie liczby B_j definiuje się rekurencyjnie:

$$
B_0 = 1, \; B_k = -\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} B_j.
$$

Np. $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$. Liczby Bernoulliego mają daleko głębsze zastosowanie niż tylko we wzorze na powyższą sumę. W świetle tego, co powiedzieliśmy w §2, nie jest zaskakujące, że niektóre wartości funkcji zeta wyrażają się (między innymi) za pomocą liczb Bernoulliego.

Niemiecki matematyk E. Kummer w 1847 r. udowodnił Wielkie Twierdzenie Fermata dla tzw. regularnych liczb pierwszych i podał ładne kryterium na regularność liczby pierwszej za pomocą liczb Bernoulliego.



Rys. 2. Jeśli Czytelnik udowodni, że funkcja ζ nie zeruje się wewnątrz szaro-kolorowego pasa, to będzie bardzo sławnym matematykiem.

składników w (1) dla $s = -1$, czyli $1 + 2 + \ldots + (x-1)$, co da $x(x-1)/2$, traktujemy to jako funkcję zmiennej rzeczywistej x i całkujemy od 0 do 1, otrzymując $\int_0^1 x(x-1)/2\,dx = -1/12$.

Natomiast wzory na $\zeta(2k+1)$, dla $k = 1, 2, \ldots$, nie tylko nie są znane, ale nie wiadomo nawet, czy liczby $\zeta(2k+1)$ są wymierne, czy nie (oprócz $\zeta(3)$, której niewymierność udowodnił francuski matematyk R. Apéry w 1978 roku, [A], [P]).

4. Co to jest hipoteza Riemanna?

Jak już wcześniej zauważyliśmy, funkcja $\zeta(s)$ nie zeruje się dla $\operatorname{Re} s > 1$. Ze wzoru na przedłużenie (którego tu nie będziemy przytaczać) wynika, że jedynymi zerami w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s < 0$ są $s = -2k$, dla $k = 1, 2, \ldots$ Są to tak zwane zera trywialne. Pozostałe zera funkcji zeta leżą więc w tzw. pasie krytycznym $0 \le \operatorname{Re} s \le 1$ (patrz rys. 2). Te zera nazywają się zerami nietrywialnymi. W obecnej erze komputerów policzono pierwszych półtora miliarda zer nietrywialnych z dokładnością do kilku miejsc po przecinku. Wszystkie leżą na prostej $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, tzw. prostej krytycznej (patrz rys. 2). Nie pozwala to, oczywiście, twierdzić, że wszystkie nietrywialne zera leżą na tej prostej. Przypuszczenie, że tak w istocie jest, nazywa się *hipotezą Riemanna* (dalej w skrócie HR) i było sformułowane po raz pierwszy przez Riemanna w jego słynnej pracy z 1859 roku. Po udowodnieniu Wielkiego Twierdzenia Fermata przez Andrew Wilesa w 1995 roku można chyba powiedzieć, że hipoteza Riemanna jest najważniejszą hipotezą we współczesnej matematyce. Przez prawie półtora wieku najwybitniejsi matematycy próbują ją udowodnić lub obalić, niestety, bez większych sukcesów.

Nawet słabsze wersje hipotezy Riemanna nie są udowodnione. Np. nie wiadomo, czy istnieje taka liczba $1/2 < a_0 < 1$, że $\zeta(s) \neq 0$ dla $a_0 < \operatorname{Re} s < 1$. Nie wiadomo też, czy wszystkie nietrywialne zera funkcji zeta są proste czy wielokrotne, tzn. czy pochodna funkcji zeta w punktach zerowych jest różna czy równa zeru.

Natomiast jest wiele częściowych wyników idących w kierunku HR. Angielski matematyk G.H. Hardy udowodnił w 1914 roku, że na prostej $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ jest nieskończenie wiele zer. Dwaj matematycy francuscy, J. Hadamard i Ch.J. de la Vallée Poussin, udowodnili niezależnie w 1896 roku, że $\zeta(s)$ nie zeruje się na prostej $\operatorname{Re} s = 1$, co razem ze wzorem na przedłużenie daje, że funkcja nie zeruje się też na prostej $\operatorname{Re} s = 0$.

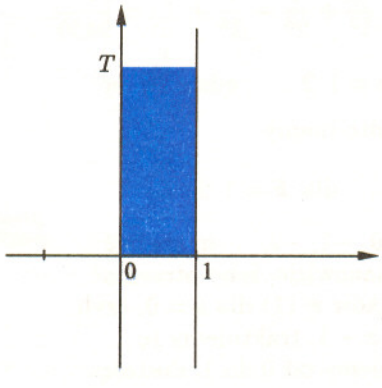
Dla ciekawości podamy pierwszych kilka nietrywialnych zer funkcji zeta z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku: $\frac{1}{2} + it$ dla $t = 14{,}13$; $21{,}02$; $25{,}01$; $30{,}42$; $32{,}93$; $37{,}58$.

Można też „oszacować” liczbę zer funkcji zeta. Mianowicie, jeśli oznaczymy przez $N(T)$ liczbę zer funkcji zeta w prostokącie $0 < \operatorname{Re} s < 1$, $0 < \operatorname{Im} s \le T$ (patrz rys. 3), to ma miejsce następująca własność:

$$N(T) \approx \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi},$$

tzn. $N(T)$ zachowuje się „prawie” jak prawa strona dla dużych T. Oszacowanie to przewidział Riemann w 1859 r., ale dowód znalazł dopiero H. von Mangoldt przeszło 30 lat poźniej.

Jeśli HR okazałaby się prawdziwa, wyjaśniłoby to wiele problemów współczesnej matematyki. Wiele twierdzeń ma obecnie postać: *Jeśli HR jest prawdziwa, to...* – strach więc pomyśleć, co by było, gdyby udało się HR obalić.



Rys. 3. W kolorowym prostokącie jest około $\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$ zer funkcji ζ.

5. Parę konsekwencji hipotezy Riemanna

Jednym z głównych powodów badania funkcji zeta było zainteresowanie rozkładem liczb pierwszych. Mianowicie, dla naturalnych x zdefiniujmy funkcję $\pi(x)$ jako *ilość liczb pierwszych mniejszych bądź równych x*. Istnieje konkretna zależność między tą funkcją a funkcją zeta Riemanna. Nie będziemy wdawać się w szczegóły, bo wychodzi to już poza ramy tego artykułu; powiemy jedynie, że wspomniani już Hadamard i de la Vallée Poussin używając właśnie funkcji zeta Riemanna udowodnili, że

(2) $$\pi(x) \approx \frac{x}{\log x},$$

tzn. $\pi(x)$ dla dużych x zachowuje się podobnie jak iloraz po prawej stronie. Jest to najprostsza wersja tzw. Twierdzenia o Liczbach Pierwszych. To, jak dobrze możemy oszacować błąd przybliżenia (2), zależy od rozkładu zer funkcji zeta Riemanna. Najlepsze oszacowanie błędu otrzymalibyśmy, gdyby HR była prawdziwa.

Inną ciekawą konsekwencją HR jest implikowane przez nią oszacowanie różnicy kolejnych liczb pierwszych. Jeśli przez p_n oznaczymy n–tą liczbę pierwszą, to z HR wynika, że istnieje taka stała C (niezależna od n), że

Oszacowania w rodzaju (3) wykorzystuje się m.in. do numerycznego wyznaczania *stałej Bruna*, czyli sumy odwrotności liczb pierwszych bliźniaczych (jest to liczba skończona). Przy takiej właśnie okazji (przypadkiem) wykryto w 1994 roku błąd w konstrukcji procesora *Pentium* – pisaliśmy o tym w *Delcie* 10/1997. *Red.*

$$p_{n+1} - p_n \le C\sqrt{p_n}\,\log p_n\,. \tag{3}$$

Bez założenia HR powyższego oszacowania nie udało się otrzymać. Problem oszacowania różnicy kolejnych liczb pierwszych ma długą historię. Udaje się otrzymać oszacowania typu

$$p_{n+1} - p_n \le C\,p_n^{a+\varepsilon}$$

dla różnych a oraz $\varepsilon > 0$ dowolnie małego. Oczywiście główną rolę po prawej stronie gra czynnik p_n^a. Tutaj zaczynano od $a = 1 - \frac{1}{33\,000}$ (G. Hoheisel, 1930), poprzez $a = 1 - \frac{1}{250}$, 5/8, 3/5, 7/12, 13/23, 11/20, 17/31, 23/42, aż do $a = 0{,}535$. Ostatni wynik otrzymali R.C. Baker i G. Harman w 1996 r.

Oczywiście, jest wiele innych konsekwencji HR, które dotyczą liczb pierwszych. Czytelnik może znaleźć je w cytowanych monografiach. Są również konsekwencje nie związane bezpośrednio z liczbami pierwszymi. Dla przykładu wspomnimy tu o dwóch. Ján Moser (słowacki matematyk) w serii prac w latach 80. bieżącego stulecia wskazał na zastosowanie funkcji zeta w kosmologii. Mianowicie, zakładając, że HR jest prawdziwa, skonstruował on rozwiązania równań Einsteina–Friedmana, dotyczące sferycznych modeli Wszechświata. W innych pracach użyto uniwersalnego charakteru funkcji zeta (związane to jest z rozkładem wartości funkcji zeta) do wyliczenia tzw. całek Feynmana po trajektoriach, które mają duże znaczenie w mechanice kwantowej.

6. „Inne" hipotezy Riemanna

Analizując przez przeszło dwieście lat funkcję zeta, matematycy próbują różnych metod: np. uogólniania funkcji zeta czy definiowania funkcji zeta–podobnych. Pozwala to lepiej zrozumieć oryginalną funkcję zeta Riemanna. Oczywiście, naturalne jest pytanie o prawdziwość odpowiednika HR dla tych mutantów.

Wprowadzono np. analogi funkcji zeta, które są związane z pewnymi typami krzywych algebraicznych. Jak udowodnił w 1942 r. jeden z najwybitniejszych współcześnie żyjących matematyków, André Weil, odpowiednik hipotezy Riemanna jest prawdziwy dla niektórych z tych nowych funkcji. 31 lat później belgijski matematyk, Pierre Deligne, udowodnił prawdziwość pewnej nieco ogólniejszej hipotezy Weila i otrzymał za to w 1978 r. w Helsinkach Medal Fieldsa (wśród matematyków uznawany za odpowiednik Nagrody Nobla w ich dziedzinie).

Ostatnio ukazała się bardzo ciekawa praca [C] innego francuskiego matematyka, Alaina Connesa (laureata Medalu Fieldsa wręczonego w 1983 r. w Warszawie), w której proponuje on inne podejście do hipotezy Riemanna. Może jest to pierwszy krok do jej udowodnienia...

Z drugiej strony, dla wielu innych funkcji zeta–podobnych odpowiednik hipotezy Riemanna nie jest prawdziwy. Ten, kto udowodni oryginalną hipotezę Riemanna (przed czterdziestką – jest to jeden z warunków otrzymania medalu!), jest niemal stuprocentowym kandydatem do Medalu Fieldsa.

7. Zakończenie

Nawet z tak krótkiego i przeglądowego artykułu widać, że problematyka związana ze zdefiniowaną tak naturalnie funkcją zeta Riemanna jest trudna i głęboka; widać też, jak dużo (a z drugiej strony, jak mało) o tej funkcji wiadomo. Do badania tak prosto określonej funkcji używa się skomplikowanego aparatu z różnych dziedzin matematyki: analizy zespolonej, teorii liczb, geometrii algebraicznej, analizy harmonicznej i wielu innych. Być może któryś z Czytelników, zafascynowany pięknem funkcji ζ, przyczyni się do odkrycia jej tajemnic.

Literatura

[A] R. Apéry, *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$.* Astérisque 61, 11–13, 1979.

[C] A. Connes, *Formule de trace en géométrie non-commutative et hypothèse de Riemann.* C.R. Acad. Sci. Paris 323, 1231–1236, 1996.

[M] J. Mináč, *A remark on the values of the Riemann zeta function.* Expo. Math. 12, 459–462, 1994.

[P] A.J. van der Poorten, *A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$.* An informal report. The Mathematical Intelligencer 1, 195–203, 1979.