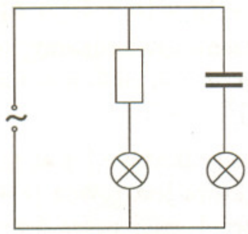
Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

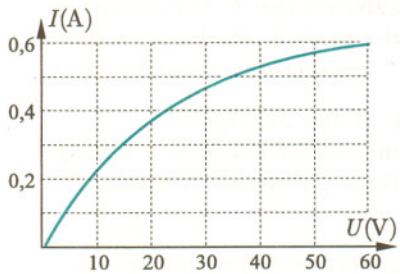
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 V 1998

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1998.



Rys. 1



Rys. 2

Zadania z fizyki nr 254, 255

Redaguje Jerzy B. BROJAN

254. Samochodzik-zabawka ma napęd zarówno na przednią, jak i na tylną oś, lecz wskutek błędu konstrukcyjnego na każdych 10 obrotów przedniej osi przypada 11 obrotów tylnej osi (promień kółek jest jednakowy). Jeśli masa samochodzika wynosi 300 g, obie osie są jednakowo obciążone, a współczynnik tarcia kółek o podłoże jest równy 0,6, to jaka jest minimalna moc silnika pozwalająca na jazdę z prędkością 15 cm/s po torze poziomym?

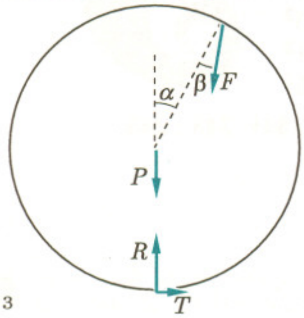
255. W obwodzie przedstawionym na rysunku 1 częstotliwość zasilania wynosi $f = 50$ Hz, oporność opornika $R = 100\ \Omega$, pojemność kondensatora $C = 20\ \mu$F, a żarówki są jednakowe. Charakterystyka prądowo-napięciowa żarówek jest przedstawiona na rysunku 2. Okazało się, że przy pewnej wartości skutecznej napięcia źródła U żarówki paliły się jednakowo silnie, a przy wyższym i niższym napięciu – niejednakowo. Obliczyć wartość U. Która żarówka paliła się jaśniej przy wyższym, a która przy niższym napięciu?

Rozwiązanie zadań z fizyki z numeru 11/1997

Przypominamy treść zadań:

246. Trzy jednakowe jednorodne walce ułożono równolegle w „piramidę" na poziomym stole tak, że ich środki utworzyły trójkąt równoboczny. Jakie warunki muszą spełniać: współczynnik tarcia μ_1 górnego walca o dolne oraz współczynnik tarcia μ_2 między walcami a stołem, aby takie ustawienie było możliwe? Dla uproszczenia pominąć wzajemne oddziaływanie między dolnymi walcami.

247. Transformator składa się z trzech uzwojeń osadzonych na wspólnym rdzeniu (zamiast – jak zwykle – dwóch). Do pierwszego uzwojenia o n_1 zwojach przyłożono napięcie przemienne o amplitudzie U_1 i częstości ω, do drugiego uzwojenia o n_2 zwojach przyłączono cewkę o indukcyjności L, a do trzeciego uzwojenia o n_3 zwojach – kondensator o pojemności C. Wyznaczyć amplitudę natężenia prądu płynącego przez pierwsze uzwojenie. Przy jakich wartościach parametrów obserwujemy rezonans?
Obowiązują standardowe założenia charakteryzujące transformator doskonały – pomijamy straty energii, zakładamy, że przez każdy zwój przechodzi jednakowy strumień pola oraz przyjmujemy, że impedancja uzwojeń jest znacznie większa od impedancji kondensatora i przyłączonej cewki.



Rys. 3

246. Rozpatrując siły działające na jeden z dolnych walców (rys. 3), dochodzimy do następujących wniosków:
1. Kąt α jest równy 30°, natomiast, aby łączny moment sił względem linii zetknięcia ze stołem był równy zeru, siła F działająca ze strony górnego walca musi leżeć na prostej przechodzącej przez tę linię. Stąd wynika $\beta = \alpha/2 = 15°$.
2. Rozkładając F na składowe – styczną $F\sin\beta$ i normalną $F\cos\beta$ – przekonujemy się, że poślizg kul o siebie nie nastąpi, jeśli $\mu_1 \geq \operatorname{tg}\beta$.
3. Pionowa składowa siły F wynosi $(1/2)P$, gdzie P – ciężar górnego walca. Zatem pozioma składowa F wynosi $(1/2)P\operatorname{tg}\beta$, a z drugiej strony jest ona równa sile tarcia T o stół. Ponieważ $R = (3/2)P$, więc otrzymujemy warunek braku poślizgu o stół w postaci $\mu_2 \geq (1/3)\operatorname{tg}\beta$.
Podsumowując, $\mu_1 \geq \operatorname{tg}15° = 2-\sqrt{3} \approx 0{,}268$, $\mu_2 \geq (2-\sqrt{3})/3 \approx 0{,}089$.

247. Zgodnie z założeniem o jednakowej wartości strumienia Φ dla każdego zwoju, napięcia na wszystkich uzwojeniach drgają w jednakowej fazie, a ich amplitudy spełniają związek

$$\frac{U_1}{n_1} = \frac{U_2}{n_2} = \frac{U_3}{n_3}.$$

Strumień pola magnetycznego w rdzeniu jest równy sumie przyczynków od każdego ze zwojów, zgodnie ze wzorem

$$\Phi = L_0(n_1 I_1 + n_2 I_2 + n_3 I_3),$$

gdzie I_1, I_2 i I_3 są chwilowymi wartościami natężeń prądu. Wspomniane założenie o małej impedancji kondensatora i cewki oznacza, że I_1, I_2 i I_3 są duże, a dokładniej – że suma w nawiasie po prawej stronie wzoru ma wartość znacznie mniejszą od każdego ze składników (porównaj analogiczne rozumowanie dla „zwykłego" transformatora, np. §19 w podręczniku J. Gintera dla III klasy liceum). Uwzględniając przeciwne fazy I_2 i I_3 otrzymujemy przybliżony związek między amplitudami prądów (które dalej oznaczamy – niezbyt konsekwentnie – tymi samymi symbolami I_1, I_2 i I_3)

$$n_1 I_1 = |n_2 I_2 - n_3 I_3|.$$

Podstawiamy $I_2 = U_2/(L\omega)$, $I_3 = U_3 C\omega$ i znajdujemy

$$I_1 = \frac{U_1}{n_1^2}\left|\frac{n_2^2}{L\omega} - n_3^2 C\omega\right|.$$

Warunek rezonansu ma postać $n_3^2 LC\omega^2 = n_2^2$.

Zadania z matematyki nr 357, 358

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 V 1998

357. Rozważamy graf skierowany (o skończenie wielu wierzchołkach), w którym każde dwa różne wierzchołki a, b są połączone dokładnie jedną z dwóch zorientowanych krawędzi: $a \to b$ lub $b \to a$. Ponadto każda krawędź jest pomalowana albo na żółto, albo na czerwono. Udowodnić, że istnieje wierzchołek, z którego można do każdego innego wierzchołka dotrzeć wzdłuż krawędzi jednego koloru, w kierunku zgodnym z ich orientacją. (Do różnych wierzchołków docelowych mogą prowadzić drogi różnych kolorów.)

358. Liczby rzeczywiste $a_1, \ldots, a_n$ spełniają dla każdej liczby rzeczywistej x nierówność

$$a_1 \sin^2 x + a_2 \sin^2 2x + a_3 \sin^2 3x + \ldots + a_n \sin^2 nx \geq 0.$$

Czy stąd wynika, że $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \geq 0$?

Zadanie **358** zaproponował pan Krzysztof Oleszkiewicz z Warszawy.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 242 (WT=1,50) i 243 (WT=3,00)
z numeru 9/1997

Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	40,82
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	21,55
Jarosław Łazuka	– Warszawa	21,27
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	17,37

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/1997

Przypominamy treść zadań:

349. Wyznaczyć największą liczbę naturalną n, dla której istnieje ciąg liczb naturalnych $x_0, x_1, \ldots, x_n$ o własnościach:

$$x_i > 2 \quad \text{dla } i = 0, 1, \ldots, n-1; \qquad x_n = 2;$$

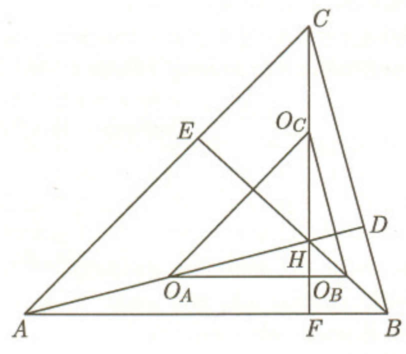
x_{i+1} jest najmniejszą liczbą naturalną nie będącą dzielnikiem liczby x_i.

350. W trójkącie ostrokątnym ABC, który nie jest równoboczny, poprowadzono wysokości AD, BE, CF. Punkty G_A, G_B, G_C są (odpowiednio) środkami ciężkości trójkątów EAF, FBD, DCE, a punkty O_A, O_B, O_C są środkami okręgów opisanych na tych trójkątach. Udowodnić, że proste O_AG_A, O_BG_B, O_CG_C (czyli *proste Eulera* tych trzech trójkątów) przecinają się w jednym punkcie.

349. Niech $x_0, x_1, \ldots, x_n$ będzie ciągiem o podanych własnościach. Jeśli x_0 jest liczbą nieparzystą, to $x_1 = 2$, czyli $n = 1$. Dalej przyjmijmy, że x_0 jest liczbą parzystą, i wobec tego $x_1 > 2$.

Przypuśćmy, że x_1 nie jest potęgą liczby pierwszej; jest więc iloczynem liczb a, $b > 1$ względnie pierwszych. Liczby te, jako mniejsze od x_1, są dzielnikami liczby x_0 (w myśl określenia x_1). A skoro są względnie pierwsze, ich iloczyn $x_1 = ab$ też jest dzielnikiem x_0 – wbrew określeniu x_1.

Zatem x_1 jest potęgą liczby pierwszej. Jeżeli $x_1 = 2^k$, $k > 1$, to $x_2 = 3$, $x_3 = 2$, więc $n = 3$. Jeżeli zaś $x_1 = p^k$, $p > 2$, $k \geq 1$, to $x_2 = 2$, więc $n = 2$. Wykazaliśmy w ten sposób, że $n \leq 3$. Przykład ciągu (6, 4, 3, 2) pokazuje, że $n = 3$ jest maksymalną możliwą wartością n.

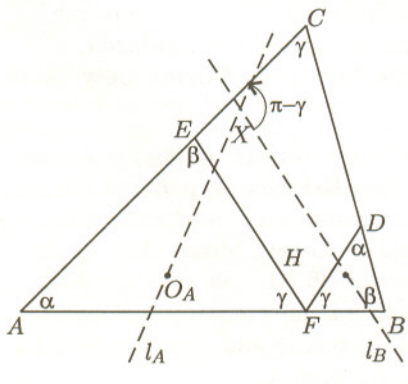


Rys. 1

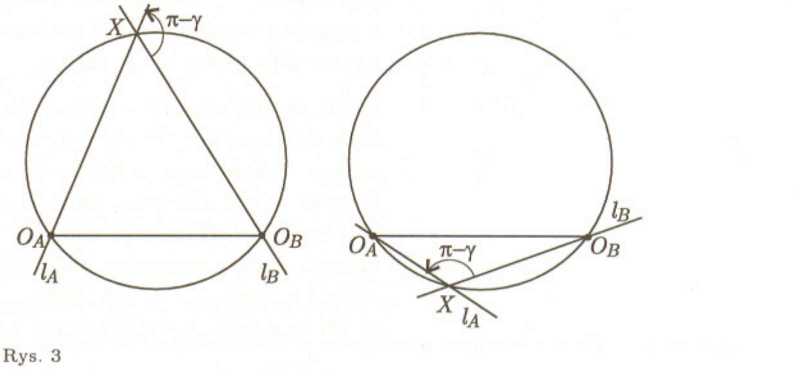
350. Oznaczmy te trzy proste Eulera odpowiednio przez ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C. Przyjmijmy, że trójka punktów (A, B, C) jest zorientowana dodatnio (poruszając się od punktu A do C wzdłuż łamanej ABC mamy wnętrze trójkąta ABC po lewej stronie). Niech H będzie punktem przecięcia wysokości AD, BE, CF. Kąty AEH i AFH są proste, więc środek O_A okręgu opisanego na trójkącie EAF pokrywa się ze środkiem odcinka AH. Podobnie punkty O_B i O_C są środkami odcinków BH i CH. Zatem trójkąt $O_AO_BO_C$ jest podobny do trójkąta ABC (rys. 1).

Jeśli $|\angle BCA| = \gamma$, to także $|\angle AFE| = |\angle BFD| = \gamma$ (rys. 2) i wobec tego trójkąt FEA jest obrazem trójkąta FBD w przekształceniu (podobieństwie) będącym złożeniem obrotu wokół punktu F o kąt $\pi-\gamma$ w kierunku dodatnim z pewną jednokładnością o środku F. Obrazem prostej ℓ_B w tym przekształceniu jest prosta ℓ_A. Stąd wynika, że proste ℓ_A i ℓ_B przecinają się w takim punkcie X, że albo trójka (O_A, O_B, X) jest zorientowana dodatnio i $|\angle O_AXO_B| = \gamma$, albo trójka (O_A, O_B, X) jest zorientowana ujemnie i $|\angle O_AXO_B| = \pi-\gamma$ (rys. 3). W obu przypadkach punkt X leży na okręgu opisanym na trójkącie $O_AO_BO_C$.

Analogicznie wykazujemy, że także proste ℓ_A i ℓ_C przecinają się w punkcie leżącym na tym samym okręgu. Jest to więc punkt wspólny wszystkich trzech prostych ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C.



Rys. 2



Rys. 3