7/98 (7)

$\Gamma \lim_{n\to\infty}$ atias

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (5′)

Wyjaśnienie oszustwa (5):

Wyliczenie współczynników asymptoty w $-\infty$ jest błędne. Błąd jest dosyć subtelny: otóż $\sqrt{x^2}$ nie jest równe x, ale $|x|$, co dla $x<0$ oznacza $-x$. Przeprowadzony rachunek powinien wyglądać następująco:

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}x}{x} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{-\sqrt{x^2}} - \frac{1}{2} \right) =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{3}{2}$$

oraz

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x)-ax) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} + x \right) =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}-x} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}}-1} = -\frac{1}{2}.$$

Zatem asymptota w $-\infty$ ma równanie $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

W naszkicowaniu wykresu pomocna jest także znajomość ekstremów funkcji. Obliczamy pochodną

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{1}{2}.$$

Przyrównując pochodną do 0 otrzymujemy równanie $f'(0)=0$, czyli $2x+1=\sqrt{x^2+x+1}$, skąd po obustronnym podniesieniu do kwadratu otrzymujemy $4x^2+4x+1 = x^2+x+1$, co ma rozwiązania $x=0$ i $x=-1$.

Ponieważ $f''(x) = \dfrac{3}{4(\sqrt{x^2+x+1})^3} > 0$, więc f ma dwa ekstrema lokalne i są to minima. Przy tym $f(0)=1$ i $f(-1)=\frac{3}{2}$.

Mając obydwie asymptoty i ekstrema funkcji wykres naszkicujemy bez trudu. Mamy nadzieję, że zdołasz to zrobić sam drogi Czytelniku. Pamiętaj, że funkcja nie ma maksimów lokalnych, bo wszystkie jej ekstrema już znaleźliśmy – są to dwa minima i nic więcej.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (6′)

Wyjaśnienie oszustwa (6):

Ciąg (a_n) określony wzorem

$(*)$ $\quad a_n = 4+4^2+4^3+\ldots+4^n-3-3^2-3^3-\ldots-3^n.$

i ciąg (a_n) określony wzorem

$(**)$ $$a_n = \binom{2n+4}{n-1}.$$

to dwa różne ciągi, tylko zaczynają się tak samo:

n	a_n wg $(*)$	a_n wg $(**)$
1	1	1
2	8	8
3	45	45
4	220	220
5	1001	1001
6	4368	4368
7	18565	18564
8	77540	77520
9	320001	319770
10	1309528	1307504
11	5326685	5311735
12	21572460	21474180
13	87087001	86493225
14	350739488	347373600
15	1410132405	1391975640
16	5662052980	5567902560
17	22712782001	22239974430
18	91044838248	88732378800
19	364760483725	353697121050

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (7)

ZADANIE: Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+3+3^2+3^3+\ldots+3^n}{3^n}.$$

Rozwiązanie: W liczniku występuje suma postępu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1=1$ i ilorazie $q=3$. Ze wzoru $S_n = a_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$ na sumę postępu geometrycznego otrzymujemy $S_n = \dfrac{3^n-1}{2}$, skąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+3+3^2+3^3+\ldots+3^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n-1}{2\cdot 3^n} =$$
$$\doteq \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{3^n}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Jak to pogodzić z obserwacją, że

$$\frac{1+3+3^2+3^3+\ldots+3^n}{3^n} > 1 \quad ?$$

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@ math.uni.wroc.pl