3/99 (15)

Γ $\lim\limits_{n\to\infty}$atias

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (14)

ZADANIE: Dla jakich wartości parametru a równanie

$$\log_7(x^2+ax)=\log_7(2x^2+3x+1)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste x?

Rozwiązanie: Po opuszczeniu logarytmów równanie przyjmuje postać

$$x^2+ax=2x^2+3x+1,$$

skąd

$$x^2+(3-a)x+1=0.$$

Równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdy $\Delta=0$. W naszym przypadku $\Delta=(3-a)^2-4$, co po przyrównaniu do zera daje dwa rozwiązania: $a=1$ i $a=5$.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (15)

Ambroży proponuje Bazylemu:
– Zagramy...
– Nie mam czasu. Muszę rozwiązać kilka równań.
– Jakich?
– $(2+x)^x=16$.
– $x=2$. Widzisz, jak szybko rozwiązałem!
– Tyle to i ja wiem. Zgadnąć rozwiązanie każdy potrafi. Ale jak do niego dojść?
– To proste. Nakładamy na obie strony logarytm dwójkowy i otrzymujemy $x\log_2 2+x=4$, skąd $x+x=4$, czyli $x=2$.
– Sprytne! Mam jeszcze dwa równania do rozwiązania, zaraz je przeliczę i możemy w coś zagrać. $(3+x)^x=3^{12}$, pewnie trzeba nałożyć logarytm trójkowy: $x\log_3 3+x=12$, $x+x=12$, $x=6\ldots$ Wyszło! Ambroży, twoja metoda jest genialna. Jeszcze jedno. $(2+x)^x=2^{18}$.
– Nie masz co liczyć, wyjdzie 6.
– Czekaj, policzę... logarytmujemy dwójkowo, $x\log_2 2+x=18$, $x+x=18$, $x=9\ldots$ Oj, chyba jednak prędko nie zagramy. Muszę pomyśleć, czemu wynik wyszedł do góry nogami.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (16)

ZADANIE: Dany jest trójkąt prostokątny o bokach całkowitych a, b, c. Wiadomo, że $c=a+7$. Udowodnić, że wówczas a jest liczbą parzystą.

Rozwiązanie: Z twierdzenia Pitagorasa mamy $a^2+b^2=c^2$. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Gdyby liczba a była nieparzysta, to wówczas c byłaby parzysta. Liczba b musiałaby więc być nieparzysta.

Popatrzmy na reszty z dzielenia przez 4 liczb a^2, b^2 i c^2. Pierwsze dwie dzielą się przez 4 z resztą 1, ostatnia zaś bez reszty, co pokazuje, że równość $a^2+b^2=c^2$ nie może mieć miejsca. Zatem a musi być liczbą parzystą.

JWR

PISZEMY PRACE (3)

Rubryka adresowana jest do uczniów. Wyniki uzyskane w najlepszych pracach zostaną omówione w Gammalimatiasie. Najlepsze prace wezmą udział w **Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki**.

WOKÓŁ WIELKIEGO TWIERDZENIA FERMATA

Rozstrzygnięcie, czy równanie $x^n+y^n=z^n$ ma rozwiązania w liczbach naturalnych x,y,z, dla $n>2$, nie jest sprawą prostą, ale wykonalną. Dzięki Andrew Wilesowi wiemy od niedawna, że takich rozwiązań nie ma. Nie zamierzamy nikogo namawiać na dowodzenie Wielkiego Twierdzenia Fermata.

Spróbujmy trochę ułatwić ten temat. Może zająć się równaniem $x^n+y^n=z^{n+1}$? To z kolei za łatwe: $x=y=z=2$ i już.

A co z $x^3+y^4=z^5$? To już trochę trudniej rozwiązać w pamięci. Ale po chwili namysłu znajdujemy $x=2^8$, $y=2^6$, $z=2^5$. Wystarczy bowiem w równości $2^n+2^n=2^{n+1}$ dobrać takie n, aby $3|n$, $4|n$ i $5|(n+1)$.

Już wiemy, jak się za takie równania zabierać! Weźmy więc równanie $x^4+y^5=z^6$. Wystarczy znaleźć takie n, które dzieli się przez $4\cdot 5=20$ i przy tym $n+1$ dzieli się przez $6\ldots$ O nie! Za dużo byśmy chcieli – liczby n i $n+1$ nie mogą być jednocześnie parzyste.

Trzeba trochę innej metody. Wyjdźmy od równości $1+3=4$ i przemnóżmy ją obustronnie przez $2^k\cdot 3^l$. Mamy wtedy

$$2^k\cdot 3^l+2^k\cdot 3^{l+1}=2^{k+2}\cdot 3^l.$$

Dobierzmy k i l tak, aby składniki po lewej stronie tej równości były odpowiednio czwartą i piątą potęgą, a liczba po prawej szóstą. Chwila namysłu i znajdujemy $k=40$ oraz $l=24$, skąd $x=2^{10}\cdot 3^6$, $y=2^8\cdot 3^5$, $z=2^7\cdot 3^4$.

A czy potrafisz rozstrzygnąć, czy inne równania typu $x^{n_1}+y^{n_2}=z^{n_3}$ mają rozwiązania? Przejrzyj *Deltę* 11/1997 – może znajdziesz tam coś pomocnego przy pisaniu pracy.

Prace prosimy przesyłać pod adresem Gammalimatiasu do 30 kwietnia 1999 r. Autorów prosimy o podanie imienia, nazwiska, adresu prywatnego, klasy oraz nazwy i adresu szkoły. Prosimy o zaznaczenie, czy praca była pisana pod kierunkiem opiekuna – jeśli tak, prosimy o podanie jego imienia, nazwiska i adresu.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@ math.uni.wroc.pl