O geometrii wewnętrznej (11/1980)

Karol BORSUK

W artykule obok profesor Karol Borsuk, twórca teorii retraktów (patrz *Delta* 3/1979) i teorii kształtu (patrz *Delta* 5/1980), przedstawia nowe podejście do problematyki geometrii wewnętrznej, dotychczas mieszczącej się w ramach geometrii różniczkowej i riemannowskiej.
Delta ma zaszczyt przedstawić pierwszą pracę z zakresu stworzonej w ten sposób problematyki. Bardziej szczegółowe opracowanie podanych wyników ukaże się w Biuletynie Polskiej Akademii Nauk (seria nauk matematycznych) w 1981 roku.

1. Metryka wewnętrzna. Podstawowym dla geometrii jest pojęcie odległości. W n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^n odległość dwóch punktów $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$ wyraża się wzorem

$$(1.1)\qquad \varrho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2},$$

a w przestrzeni Hilberta H, której punktami są ciągi liczb $x = (x_1, x_2, \ldots)$ spełniające warunek $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$, odległość punktu x od punktu $y = (y_1, y_2, \ldots)$ wyraża się wzorem

$$(1.2)\qquad \varrho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2}.$$

Wzór (1.2) jest ogólniejszy od wzoru (1.1), ponieważ przestrzeń E^n możemy uważać za podzbiór przestrzeni H, złożony ze wszystkich punktów postaci $x = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$. Wzór (1.2) określa metrykę ϱ dla każdej przestrzeni A będącej podzbiorem przestrzeni H. Zauważmy jednak, że takie pojęcie odległości odbiega od potocznego rozumienia odległości punktów $x, y \in A$, ponieważ mówiąc o odległości między x i y w przestrzeni A, bierzemy pod uwagę nie tyle liczbę $\varrho(x,y)$, ile długość dróg w przestrzeni A, które należy przebyć, aby od x przejść do y. Tak np., jeżeli powierzchnię Ziemi traktujemy jako sferę S^2 położoną w przestrzeni E^3, to mówiąc o odległości między punktami $x, y \in S^2$, mamy zazwyczaj na myśli długość drogi, którą trzeba na S^2 przebyć, aby od x przejść do y, a więc liczbę, która dla $x \neq y$ jest większa od odległości tych punktów w sensie metryki ϱ. Przez łuk L łączący punkty x, y w przestrzeni A rozumiemy obraz przedziału liczbowego $\langle 0, 1\rangle$ przy homeomorfizmie $s : \langle 0, 1\rangle \to L \subset A$, zwanym przedstawieniem parametrycznym łuku L zawierającego oba punkty x i y. Przez długość tego łuku rozumiemy liczbę $|L|$, którą możemy określić jako kres górny liczb postaci $\sum\limits_{i=0}^{k} \varrho\left(s(t_i), s(t_{i+1})\right)$, gdzie $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} = 1$. Wiadomo, że tak określona liczba $|L|$ nie zależy od sposobu obrania przedstawienia parametrycznego łuku L. Kładąc

$$(1.3)\qquad \begin{cases} \varrho_A(x,y) = \text{ kres dolny liczb } |L|, \text{ gdzie } L \text{ przebiega} \\ \text{wszystkie łuki łączące } x \text{ i } y \text{ w przestrzeni } A, \end{cases}$$

otrzymamy pojęcie odległości punktów x, y w przestrzeni A. Jasne jest jednak, że nie w każdej przestrzeni A (o danej metryce ϱ) liczba $\varrho_A(x,y)$ jest określona i skończona dla każdej pary punktów $x, y \in A$: potrzeba, by przestrzeń A spełniała warunek

$$(1.4)\qquad \begin{cases} \text{dla każdej pary punktów } x, y \in A \text{ istnieje w } A \text{ łuk } L \\ \text{o skończonej długości, taki że } x, y \in L. \end{cases}$$

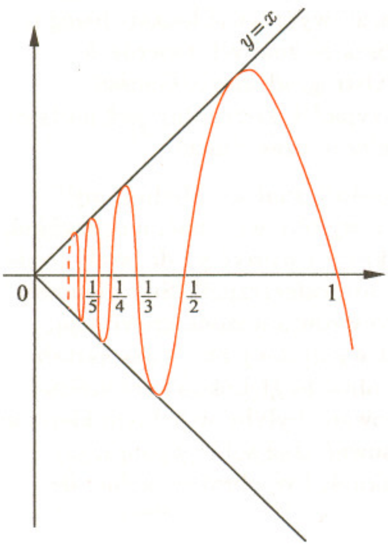
Przy spełnieniu przez przestrzeń A warunku (1.4), wzór (1.3) przyporządkowuje każdej parze punktów $x, y \in A$ liczbę $\varrho_A(x,y)$, która spełnia wszystkie aksjomaty odległości. Tak określoną funkcję ϱ_A nazywamy metryką wewnętrzną w przestrzeni A. Spełnia ona warunek

$$\varrho(x,y) \leq \varrho_A(x,y) \quad \text{dla każdej pary punktów} \quad x, y \in A.$$

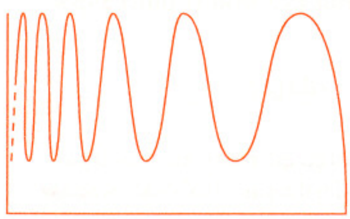
Aby jednak przejście od danej metryki ϱ do metryki wewnętrznej ϱ_A nie powodowało zmiany topologicznych własności przestrzeni A, należy jeszcze założyć, że przestrzeń ta spełnia warunek

$$(1.5)\qquad \begin{cases} \text{dla każdego punktu } x \in A \text{ i każdej liczby } \varepsilon > 0 \\ \text{istnieje otoczenie } U_{x,\varepsilon} \text{ dla } x \text{ w } A, \text{ takie że dla} \\ \text{każdego punktu } y \in U_{x,\varepsilon} \text{ jest } \varrho_A(x,y) < \varepsilon. \end{cases}$$

Powiemy, że przestrzeń A (z metryką ϱ) jest geometrycznie dopuszczalna (w terminologii angielskiej *geometrically acceptable*), w skróceniu $A \in \mathbf{GA}$, jeżeli spełnione są oba warunki (1.4) i (1.5).



Ta przestrzeń nie spełnia warunku (1.4). Długości kolejnych fragmentów „sinusoidy” pomiędzy dwoma kolejnymi grzbietami są większe od odpowiednich wyrazów szeregu harmonicznego $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$ Z rozbieżności tego szeregu wynika, że długość widocznej na rysunku krzywej jest nieskończona.



Ta przestrzeń nie spełnia warunku (1.5), więc także nie jest geometrycznie dopuszczalna.

Przestrzeń metryczna nazywa się lokalnie spójna, jeżeli każdy jej punkt ma dowolnie małe spójne otoczenie. Continuum to przestrzeń metryczna zwarta i spójna.

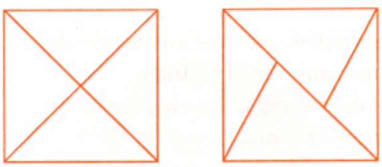
Rozmaitość topologiczna to spójna przestrzeń lokalnie homeomorficzna z przestrzenią euklidesową E^n. Mówimy, że na takiej rozmaitości dana jest metryka riemannowska, gdy kwadrat różniczki długości łuku w tej przestrzeni w lokalnych układach współrzędnych wyraża się wzorem

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j,$$

gdzie g_{ij} są funkcjami różniczkowalnymi.

Przykłady: Przestrzenie wypukłe są geometrycznie dopuszczalne, przy czym metryka wewnętrzna ϱ_A nie różni się od danej w A metryki ϱ. Tak jest np. w przestrzeni $A = E^n$ lub $A = H$.
Jasne jest, że każda przestrzeń $A \in \mathbf{GA}$ jest spójna i lokalnie spójna. Z drugiej strony wiadomo, że każde lokalnie spójne continuum jest homeomorficzne z pewną przestrzenią wypukłą, a więc z przestrzenią **GA**.
Do klasy przestrzeni **GA** należą też wszystkie spójne przestrzenie riemannowskie, jak również wszystkie spójne wielościany w sensie elementarno-geometrycznym, a także ogólniejsze od nich spójne *politopy*, a więc przestrzenie P, dla których istnieje skończona lub przeliczalna triangulacja T, której sympleksy są rozumiane w sensie geometrii elementarnej i spełniony jest warunek, że dla każdego punktu $x \in P$ istnieje w triangulacji T skończona liczba sympleksów, których suma stanowi otoczenie punktu x w P. Zauważmy też, że jeżeli A i B są przestrzeniami **GA**, to ich iloczyn kartezjański $A \times B$ jest też przestrzenią **GA**, jeżeli zaś A i B są podzbiorami domkniętymi przestrzeni metrycznej X, a ich część wspólna nie jest pusta, to $A \cup B \in \mathbf{GA}$.

W geometrii elementarnej przez sympleks rozumiemy najmniejszy zbiór wypukły (położony w przestrzeni E^n) zawierający $n+1$ punktów „w położeniu ogólnym” (żadne trzy nie leżą na linii prostej, żadne cztery nie są współpłaszczyznowe itd.). Sympleksy jednowymiarowe to odcinki, dwuwymiarowe – trójkąty, a trójwymiarowe – czworościany.
W topologii nazywamy sympleksem każdy zbiór homeomorficzny z takim sympleksem „elementarnym”. Przez triangulację wielościanu rozumiemy taki jego podział na sympleksy, przy którym każde dwa sympleksy, jeśli się przecinają, to wzdłuż całej wspólnej k-wymiarowej ściany, krawędzi czy wierzchołka. Na poniższym rysunku widzimy dwa podziały kwadratu na trójkąty, z których tylko pierwszy jest triangulacją.

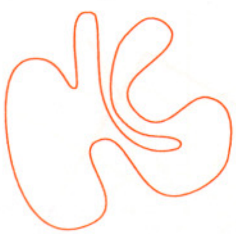


Przez izometrię wewnętrzną rozumiemy taką funkcję f przekształcającą przestrzeń $A \in \mathbf{GA}$ na przestrzeń $A' \in \mathbf{GA}$, że $\varrho_A(x, y) = \varrho_{A'}(f(x), f(y))$ dla każdej pary punktów $x, y \in A$. Jeżeli taka funkcja istnieje, to mówimy, że przestrzenie A i A' są wewnętrznie izometryczne. Jasne jest, że każda izometria (w sensie metryki ϱ) jest izometrią wewnętrzną (ale nie na odwrót), natomiast każda izometria wewnętrzna jest homeomorfizmem. Złożenie dwóch izometrii wewnętrznych, jak również odwrócenie izometrii wewnętrznej są izometriami wewnętrznymi. A więc relacja wewnętrznej izometrii jest relacją równoważnościową.

Zauważmy, że w myśl przyjętej tu definicji długości łuku $L \subset A$, przy izometrii wewnętrznej $f : A \to A'$ łuk L przechodzi na łuk $L' \subset A'$, taki że $|L| = |L'|$. Z drugiej strony, każdy homeomorfizm f spełniający ten warunek jest izometrią wewnętrzną.

Przez geometrię wewnętrzną rozumiemy tu teorię tych własności przestrzeni **GA**, które zachowują się przy wszystkich izometriach wewnętrznych. A więc z punktu widzenia geometrii wewnętrznej dwie wewnętrznie izometryczne przestrzenie $A, A' \in \mathbf{GA}$ są jednakowe. Natomiast ich własności geometryczne (tj. własności zależne od pierwotnie przyjętych w nich metryk ϱ i ϱ') mogą być istotnie różne.

„Politop” jest pojęciem nieco ogólniejszym od wielokąta czy wielościanu. Rysując na płaszczyźnie siatkę trójkątów równobocznych tak, jak byśmy układali kafelki, otrzymujemy jej triangulację. Płaszczyzna jest więc politopem. Z kolei politopem nie jest przestrzeń przedstawiona na rysunku poniżej, a nawet zwykłe koło.



2. Podzbiory GA przestrzeni E^n. Podamy tu dowód (w postaci nieco szkicowej) twierdzenia następującego:

(2.1) **Twierdzenie.** *Jeżeli A jest* **GA***-podzbiorem przestrzeni E^n, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje w przestrzeni E^{2n} zbiór wewnętrznie izometryczny z A, który w sensie metryki ϱ ma średnicę mniejszą od ε.*

Dowód. Niech d będzie daną liczbą dodatnią i niech D będzie kwadratem w płaszczyźnie E^2 o wierzchołkach $(0,0)$, $(d,0)$, $(0,d)$ i (d,d). Przyporządkujmy każdej liczbie całkowitej k punkt $a_k = \left(\frac{1}{2}d \cdot \left(1 + \frac{k}{|k|+1}\right), 0\right)$ położony na odcinku $\overline{(0,0),(d,0)}$. Wówczas $\varrho((0,0), a_k) < \varrho((0,0), a_{k+1})$ dla każdego całkowitego k. Oznaczmy przez b_k wierzchołek trójkąta równoramiennego leżącego w D o podstawie $\overline{a_k a_{k+1}}$ i bokach $\overline{a_k b_k}$, $\overline{b_k a_{k+1}}$ o długości d. Niech teraz A_k oznacza przedział $\langle k \cdot d, (k+1) \cdot d\rangle \subset E^1$. Wówczas $E^1 = \bigcup_k A_k$.

Kładąc $B_{2k} = \overline{a_k b_k}$, $B_{2k+1} = \overline{b_k a_{k+1}}$ dla każdego całkowitego k, zauważmy, że istnieje przekształcenie φ prostej E^1 na zbiór $\bigcup_k B_k \subset D$, takie że dla każdego całkowitego k przekształcenie φ przeprowadza izometrycznie odcinek A_k na odcinek B_k i to tak, że

$$\varphi(2k \cdot d) = a_k, \quad \varphi((2k+1) \cdot d) = b_k.$$

Jasne jest, że φ jest homeomorfizmem przekształcającym całą prostą E^1 na zbiór $\bigcup_k B_k$.

Metoda dowodu zamieszczonego obok twierdzenia (2.1) pozwala też na wykazanie, że przestrzeń Hilberta H może być wewnętrznie izometrycznie zanurzona w dowolnie małą kostkę w niej.

Cała przestrzeń E^n jest sumą wszystkich n-wymiarowych kostek postaci

$$D_{\mu_1,\ldots,\mu_n} = A_{\mu_1} \times \ldots \times A_{\mu_n},$$

gdzie $\mu_1, \ldots, \mu_n$ przebiega wszystkie układy złożone z n liczb całkowitych. Kładąc

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) \qquad \text{dla każdego } (x_1, \ldots, x_n) \in E^n,$$

otrzymujemy homeomorfizm ψ przekształcający całą przestrzeń E^n na pewien podzbiór zbioru C będącego iloczynem kartezjańskim n kwadratów D. Zbiór C możemy traktować jako kostkę $2n$-wymiarową, położoną w przestrzeni E^{2n}, identyfikując punkty postaci $((x_1, x_2), (x_3, x_4), \ldots, (x_{2n-1}, x_{2n})) \in C$ z punktami $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ w przestrzeni E^{2n}.

Homeomorfizm ψ przekształca izometrycznie każdą kostkę postaci $D_{\mu_1,\ldots,\mu_n} = A_{\mu_1} \times \ldots \times A_{\mu_n}$ na zbiór $B_{\mu_1} \times \ldots \times B_{\mu_n}$, skąd wynika, że każdy łuk $L \subset A_{\mu_1} \times \ldots \times A_{\mu_n}$ przechodzi izometrycznie na łuk $\psi(L) \subset B_{\mu_1} \times \ldots \times B_{\mu_n}$. To pozwala okazać, że przy homeomorfizmie ψ zachowują się długości wszystkich łuków L położonych w przestrzeni E^n. A więc, dla każdego zbioru $A \in \mathbf{GA}$ położonego w E^n, przekształcenie częściowe $\psi|A$ jest izometrią wewnętrzną przekształcającą A na zbiór $A' = \psi(A) \subset C$. Ale średnica kostki C, będącej iloczynem kartezjańskim n kwadratów o boku d, jest równa $\sqrt{n(\sqrt{2}d)^2} = d \cdot \sqrt{2n}$. Jeżeli więc, dotychczas dowolną, liczbę dodatnią d obierzemy tak, by była mniejsza od $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}}$, to średnica zbioru A' stanie się mniejsza od ε. To kończy dowód twierdzenia (2.1).

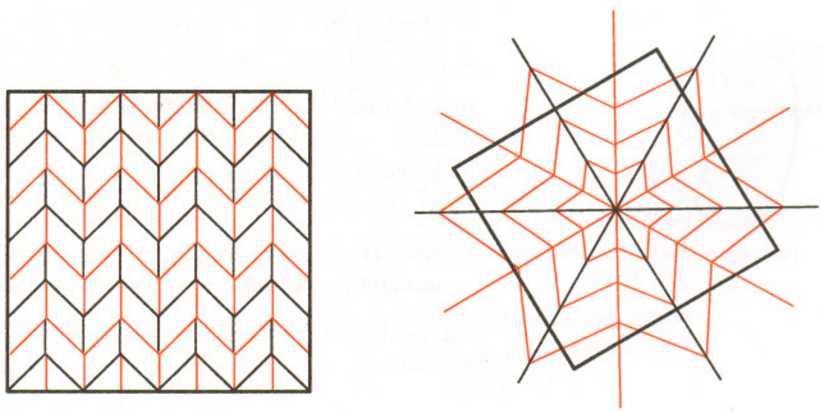
3. Uwagi w związku z twierdzeniem (2.1). Z twierdzenia (2.1) wynika w szczególności, że cała przestrzeń E^3 (a więc przestrzeń, którą czasami skłonni jesteśmy uważać za matematyczny schemat naszej przestrzeni kosmicznej) daje się potraktować jako podzbiór przestrzeni E^6 mający dowolnie małą średnicę. Przy takim ujęciu punkty położone w przestrzeni E^3 w dowolnie wielkiej odległości jeden od drugiego stają się w przestrzeni E^6 (w sensie zwykłej metryki ϱ) dowolnie bliskie.

Jednym z podstawowych twierdzeń geometrii przestrzeni riemannowskich jest *Theorema egregium* („Wspaniałe twierdzenie"): krzywizna całkowita powierzchni nie zmienia się przy wewnętrznych izometriach.

W kosmologii współczesnej zakłada się zwykle, że rozpatrywane przestrzenie są riemannowskie – co zresztą może być kwestionowane. Jeśli jednak ograniczymy się do przestrzeni riemannowskich i do wewnętrznych izometrii przeprowadzających takie przestrzenie na przestrzenie riemannowskie, to twierdzenie (2.1) nie da się utrzymać, wiadomo bowiem, że np. powierzchnia riemannowska wewnętrznie izometryczna ze sferą S^2 musi być ze sferą tą izometryczna.

Geometria wewnętrzna, ograniczona do zakresu przestrzeni riemannowskich, jest jednym z klasycznych działów geometrii różniczkowej. Gdy ograniczenie to się odrzuci, to konieczna staje się rezygnacja z takich klasycznych niezmienników, jak krzywizna całkowita (gaussowska), natomiast pojawiają się nowe fakty (jak np. twierdzenie (2.1)) i powstaje nowa, obszerna problematyka.

Przedstawiamy tu dwa sposoby takiego składania kwadratu, by zmieścił się w dowolnie małej kulce przestrzeni trójwymiarowej. Linia kolorowa znaczy „zagiąć do góry", czarna – „zagiąć do dołu". Za pomocą drugiego z tych sposobów można i całą płaszczyznę E^2 przekształcić przez izometrię wewnętrzną na podzbiór przestrzeni E^3 o dowolnie małej średnicy i jest to pozytywne rozwiązanie postawionego w tekście artykułu problemu. Autorem tego rozwiązania jest dr J. Olędzki.



Powstaje pytanie, czy wymiar $2n$ przestrzeni, w której $\mathbf{GA}$-podzbiory przestrzeni E^n dają się umieścić bez zmiany ich wewnętrznych własności, ale z dowolnym zmniejszeniem średnicy, daje się zastąpić przez liczbę mniejszą. Ostatnio S. Nowak i J. Olędzki okazali, że liczba $2n$ daje się zastąpić przez liczbę $n+1$.

Nie wiadomo też, czy dla każdego n istnieje w przestrzeni E^n zbiór $A \in \mathbf{GA}$ (czy nawet spójny wielościan), który nie może być przez izometrię wewnętrzną przeprowadzony na podzbiór przestrzeni E^{2n-1} o dowolnie małej średnicy (w sensie metryki ϱ). Nasuwa się też naturalne pytanie, czy każda ośrodkowa przestrzeń $A \in \mathbf{GA}$, o wymiarze $\leq n$, daje się przez izometrię wewnętrzną przeprowadzić na podzbiór przestrzeni E^{2n+1}. Pozytywne rozwiązanie tego zagadnienia stanowiłoby naturalny odpowiednik twierdzenia Mengera–Nöbelinga o tym, że każda ośrodkowa przestrzeń metryczna wymiaru nie większego niż n jest homeomorficzna z pewnym podzbiorem przestrzeni E^{2n+1}.
Poniżej podamy twierdzenie, które w zakresie spójnych politopów 1-wymiarowych daje pozytywną odpowiedź na to pytanie.

4. Spójne politopy 1-wymiarowe. Podamy ideę dowodu (z pominięciem niektórych szczegółów o charakterze technicznym) twierdzenia następującego:

(4.1) **Twierdzenie.** *Dla każdego spójnego 1-wymiarowego politopu P (położonego w przestrzeni H) i każdej liczby dodatniej ε istnieje w E^3 politop P' o średnicy $< \varepsilon$, wewnętrznie izometryczny z P.*

Dowód. Niech T będzie triangulacją politopu P o 1-wymiarowych sympleksach (a więc odcinkach) $L_1, L_2, \ldots$ (może być ich liczba skończona). Możemy przyjąć, że średnica każdego z tych odcinków jest $< \frac{\varepsilon}{6}$. Kładąc $P_k = L_1 \cup \ldots \cup L_k$, mamy $P_k \subset P_{k+1}$ oraz $P = \bigcup\limits_k P_k$.

Każdemu wskaźnikowi k przyporządkujmy liczbę $\eta_k < \frac{\varepsilon}{6}$, taką że każdy odcinek L_i, którego choć jeden koniec należy do P_k, ma długość większą od η_k. Obierzmy punkt $b_0 \in E^3$ i każdemu wskaźnikowi k przyporządkujmy kulę $Q_k \subset E^3$ o środku b_0 i promieniu $r_k < \eta_k$ tak, by $r_{k+1} < r_k$ dla każdego k. Ustawmy teraz wszystkie wierzchołki triangulacji T w ciąg (być może skończony) $a_1, a_2, \ldots$ tak, by wskaźniki wierzchołków należących do P_k były mniejsze od wskaźników wierzchołków należących do $P_{k+1} \setminus P_k$.

Każdemu $\mu = 1, 2, \ldots$ przyporządkujemy punkt $b_\mu \in E^3$ tak, by spełnione były warunki:

$$\text{jeżeli} \quad a_\mu \in P_k, \qquad \text{to} \quad b_\mu \in Q_{k+1}; \tag{4.2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{żadna płaszczyzna położona w } E^3 \text{ nie zawiera} \\ \text{więcej niż 3 punkty z ciągu } b_1, b_2, \ldots \end{array} \right. \tag{4.3}$$

Zauważmy, że jeżeli odcinek $a_\mu a_\nu$ należy do triangulacji T oraz $a_\mu \in P_k$, to $\varrho(a_\mu, a_\nu) > \eta_k$, a więc oba punkty b_μ, b_ν leżą w kuli Q_k. Stąd

$$\varrho(b_\mu, b_\nu) < \eta_k < \varrho(a_\mu, a_\nu) < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Weźmy teraz pod uwagę elipsoidę obrotową $M_{\mu,\nu}$ będącą zbiorem wszystkich punktów $x \in E^3$ spełniających warunek

$$\varrho(x, b_\mu) + \varrho(x, b_\nu) = \varrho(a_\mu, a_\nu). \tag{4.4}$$

Jasne jest, że skończony lub przeliczalny zbiór płaszczyzn położonych w E^3 przecina elipsoidę $M_{\mu,\nu}$ w zbiorze pierwszej kategorii (w sensie Baire'a). Stosując więc proste rozumowanie indukcyjne, możemy kolejnym odcinkom L_j, z których każdy ma postać $\overline{a_\mu a_\nu}$, przyporządkować punkty $b'_j \in M_{\mu,\nu}$ tak, by żadna z płaszczyzn w przestrzeni E^3 nie zawierała więcej niż 3 spośród punktów $b_1, b_2, \ldots$ oraz $b'_1, b'_2, \ldots$ Ponadto, na odcinku $L_j = \overline{a_\mu a_\nu}$ możemy obrać punkt a'_j, taki że

$$\varrho(a_\mu, a'_j) = \varrho(b_\mu, b'_j) \ \text{ oraz } \ \varrho(a_\nu, a'_j) = \varrho(b_\nu, b'_j). \tag{4.5}$$

Wprowadzenie na każdym odcinku b_j postaci $\overline{a_\mu a_\nu}$ wierzchołka a'_j daje podpodział T' triangulacji T politopu P. Przyporządkowując każdemu a_μ punkt b_μ, a punktowi a'_j – punkt b'_j, otrzymamy wzajemnie jednoznaczne

Rozwiązanie zadania F 500.
Maksymalne naprężenie liny obciążonej nieruchomą windą wynosi

$$\sigma = \frac{Q}{S_1} = \frac{mg}{\pi d^2/4},$$

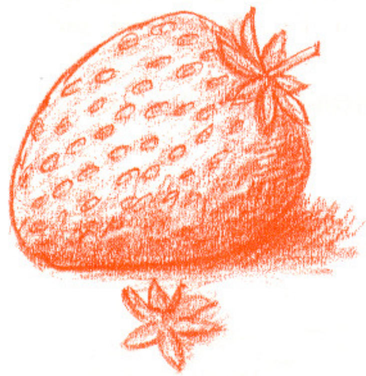
gdzie m jest masą windy, a $d = 9$ mm średnicą liny. Maksymalna siła, z jaką winda może działać na linę przy gwałtownym zahamowaniu, wynosi $mg + 8mg = 9mg$. Osiągane naprężenie liny wynosi wtedy

$$\sigma = \frac{9mg}{\pi D^2/4} = \frac{36mg}{\pi D^2},$$

gdzie D jest szukaną średnicą. W obu przypadkach maksymalne naprężenie $\sigma = \frac{F}{S}$ (F jest siłą działającą na linę) jest takie samo. Stąd otrzymujemy

$$\frac{4mg}{\pi d^2} = \frac{36mg}{\pi D^2}$$

i dostajemy, że średnica liny powinna wynosić co najmniej $D = 3d = 27$ mm.



Zbiór pierwszej kategorii w sensie Baire'a to zbiór będący przeliczalną sumą zbiorów domkniętych o pustym wnętrzu – a także każdy jego podzbiór. Ważne twierdzenie Baire'a głosi, że niepusta zupełna przestrzeń metryczna nie jest pierwszej kategorii.

Przy przekształceniu symplicjalnym obraz sympleksu jest zawarty w pewnym sympleksie.

przekształcenie zbioru wierzchołków triangulacji T' na zbiór punktów położonych w przestrzeni E^3, taki że żadne cztery punkty tego zbioru nie leżą w jednej płaszczyźnie. Przekształcenie to indukuje pewne przekształcenie symplicjalne politopu P na politop P' będący sumą wszystkich odcinków postaci $\overline{b_\mu b'_j}$ oraz $\overline{b_\nu b'_j}$, gdzie $L_j = \overline{a_\mu a_\nu}$. Z uwagi na (4.4) i (4.5) przekształcenie to jest izometrią wewnętrzną.

Każdy z punktów b_μ leży jednak w kuli Q_1 o środku b_1 i promieniu $r < \eta_1 < \frac{\varepsilon}{6}$, a każdy punkt b'_j leży na obrotowej elipsoidzie $M_{\mu,\nu}$, dla której b_μ jest ogniskiem, a średnica jest równa $\varrho(a_\mu, a_\nu) < \frac{\varepsilon}{3}$. A więc zbiór wszystkich wierzchołków politopu P' ma średnicę mniejszą niż $2 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6}\right) = \varepsilon$. Więc i średnica całego politopu P' jest mniejsza od ε i dowód twierdzenia (4.1) jest zakończony.

Przeniesienie tego twierdzenia na spójne politopy wymiaru większego niż 1 nastręcza istotne trudności. Nierozstrzygnięte jest nawet proste pytanie, czy każdy spójny wielościan dwuwymiarowy jest wewnętrznie izometryczny z wielościanem położonym w przestrzeni E^5, a w szczególności z wielościanem o dowolnie małej średnicy. Nie wiadomo również, czy każde 1-wymiarowe continuum należące do klasy **GA** jest wewnętrznie izometryczne z continuum położonym w przestrzeni E^5. W geometrii wewnętrznej, rozumianej w sensie tu podanym, istnieje wiele zagadnień, które oczekują rozstrzygnięcia. Nie wiem np. czy miara k-wymiarowa (odpowiednio zdefiniowana w przestrzeni **GA**) zachowuje się niezmienniczo przy izometriach wewnętrznych. Nie wiadomo też, kiedy izometria wewnętrzna $f : A \to A'$ (gdzie A i A' są **GA**-zbiorami położonymi w przestrzeni Hilberta H) daje się otrzymać przez ciągłą deformację zbioru A, zachowującą długość krzywych, tj. czy istnieje przekształcenie ciągłe

$$\widehat{f} : A \times \langle 0, 1\rangle \to H,$$

takie że $\widehat{f}(x, 0) = x$, $\widehat{f}(x, 1) = f(x)$ dla każdego punktu $x \in A$ oraz że dla każdego $t \in \langle 0, 1\rangle$ przekształcenie $f_t : A \to H$ dane przez wzór $f_t(x) = \widehat{f}(x, t)$ jest izometrią wewnętrzną.

Nie wiadomo też, kiedy zbiór $A \in$ **GA** położony w przestrzeni E^n daje się przez izometrię wewnętrzną przeprowadzić na zbiór $A' \subset E^n$, który nie jest izometryczny z A w sensie metryki ϱ.

Lista nierozstrzygniętych pytań geometrii wewnętrznej jest bardzo obszerna.

Rozwiązanie zadania M 882.
Dla ciągu stałego teza jest oczywista. Niech $r \neq 0$ będzie różnicą ciągu; dobierzmy liczbę naturalną k tak, by mieć $10^{k-1} \leq r < 10^k$. Niech n będzie taką liczbą naturalną, że $10^{n-k} - (n+1) > 0$ i $a_1 < 10^n$. Istnienie takiej liczby jest oczywiste, bowiem ciąg $b_n = 10^{n-k} - (n+1)$ jest rozbieżny do ∞. Niech K będzie zbiorem tych wyrazów ciągu, które są zawarte w przedziale $[10^n, 10^{n+1})$. Zbiór K zawiera co najmniej $9 \cdot 10^{n-k}$ elementów. Wreszcie suma cyfr dowolnego elementu z K jest nie większa niż $9(n+1)$. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika więc, że spośród elementów zbioru K można wybrać dwa o tej samej sumie cyfr.

Kącik olimpijski (23)

Trzynaste zadanie

W dniach 6–10 listopada 1998 r. odbyła się w Warszawie IX Olimpiada Matematyczna Państw Bałtyckich *Baltic Way '98*. W konkursie tym brały udział ekipy następujących 10 państw: Danii, Estonii, Finlandii, Islandii, Niemiec, Norwegii, Litwy, Łotwy, Polski, Szwecji oraz miasta Sankt Petersburg. W skład każdej delegacji wchodzili uczniowie szkół średnich. Zawody miały charakter drużynowy i polegały na rozwiązaniu 20 zadań w ciągu $4\frac{1}{2}$ godziny. Każde zadanie było oceniane w skali 0–5 punktów. Drużyna polska z sumą 68 punktów zajęła trzecie miejsce za drużyną Łotwy (72 pkt.) oraz Estonii (70 pkt.).

Zadanie 13. sprawiło uczniom najwięcej trudności – żadnej ekipie nie udało się zdobyć ani jednego punktu za rozwiązanie tego zadania (i jak tu nie być przesądnym...). Niżej zaprezentujemy dwa rozwiązania tego zadania.

13. *W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ boki AE i BC są równoległe oraz $\angle ADE = \angle BDC$. Przekątne AC i BE przecinają się w punkcie P. Udowodnić, że $\angle EAD = \angle BDP$ oraz $\angle CBD = \angle ADP$.*