zasługi w badaniu prehistorii człowieka, gdyż znakomicie nadaje się do datowania emalii na zębach.

Metody **magnetyczne** wykorzystują zmienność kierunku ziemskiego pola w przeszłości. Domeny tlenku żelaza w rozgrzanym materiale (lawa, glina w piecu garncarskim) układają się zgodnie z polem magnetycznym Ziemi. „Zamrożona” magnetyzacja może być więc wykorzystana do datowania. W ciągu ostatnich 3 milionów lat bieguny ziemskiego magnesu zamieniały się miejscami 6 razy!

Odrębną grupę stanowią metody **astro-klimatyczne**. Opierają się one na korelacjach zmian położenia Ziemi względem Słońca i długoterminowych zmian klimatycznych oraz ich efektów fizycznych i biologicznych. Przykładowo, poziom oceanów był niższy w okresach zlodowaceń. Bogatsze nagromadzenie pyłków kwiatowych w osadach świadczy o okresach ocieplenia. Przenikalność magnetyczna osadów jest zależna od rozpuszczania magnetytu w procesach biologicznych. Stosunek stężeń izotopów $^{18}O/^{16}O$ jest czuły na temperaturę, stosunek $^{13}C/^{12}C$ jest zaś zależny od intensywności fotosyntezy. Poszukuje się coraz to nowych korelacji tego typu i choć metody na nich oparte są generalnie bardziej zawodne od metod radioizotopowych czy luminescencyjnych, stanowią często ich sprawdzian i cenne uzupełnienie.

Zobaczmy teraz, jak omówione metody przyczyniły się do poznania prehistorii człowieka. Do początków lat 80. panowało przekonanie, że rozwój biologicznych przodków człowieka zachodził równolegle na kilku kontynentach. *Homo erectus*, który pojawił się w Afryce około 2 mln lat temu, rozprzestrzenił się na całą Europę i Azję. Znaleziono nawet dziecko *homo erectus* na Jawie. „Normalne” namagnesowanie minerałów wokół znaleziska pozwoliło umiejscowić jego wiek między 1,79 a 1,95 mln lat temu. *Homo erectus* przekształcał się stopniowo w *archaic homo sapiens*, by około 100 tys. lat temu dać początek *homo neandertalsis*. W środowiskach odizolowanych *homo erectus* przetrwał niemalże do „naszych czasów”. Świadczą o tym dwa znaleziska na Jawie datowane za pomocą rezonansu spinowego na 53±4 i 27±2 tys. lat!

Neandertalczyk wyginął kilkadziesiąt tysięcy lat temu. Niemal jednoczesne

Arytmetyczne figle

Jarosław GÓRNICKI

Matematyka jest nauką, którą charakteryzuje duży stopień precyzji. Oznacza to, że poruszanie się w ramach tego przedmiotu wymaga przestrzegania określonych reguł. Jak pokazuje historia (piszemy o tym w dalszej części), ich kształtowanie to nie jednorazowy akt, lecz długotrwały proces, w którym ważną rolę odgrywają *paradoksy*. Z jednej strony jaskrawo uwidaczniają one słabości naszych dotychczasowych koncepcji, a z drugiej pozwalają sprawdzić jakość naszej wiedzy i lepiej zrozumieć istotę używanych pojęć i metod. Wielokrotnie potrzeba wyjaśnienia odkrytego paradoksu stawała się impulsem postępu. Paradoksom zawdzięczamy przekonanie o konieczności formalizacji geometrii, teorii mnogości, rozwoju logiki i podstaw prawdopodobieństwa.

Poniżej przypominamy kilka szkolnych figli o charakterze rachunkowym, mając nadzieję, że Czytelnicy bez trudu wskażą w nich błędy prowadzące do fałszywych wniosków. Ostatnie dwa z nich mają swój udział w rygoryzacji analizy i mogą być pretekstem do poważniejszych rozważań.

Figiel 1.

Jeżeli $a = b$ i $b \neq 0$, to

$$a \cdot b = a^2,$$
$$a \cdot b - b^2 = a^2 - b^2,$$
$$b(a-b) = (a+b)(a-b),$$
$$b = a + b,$$
$$b = 2 \cdot b,$$
$$1 = 2.$$

Figiel 2.

Niech $a > b$. Wtedy dla pewnego dodatniego c

$$a = b + c,$$

skąd

$$a(a-b) = (b+c)(a-b),$$
$$a^2 - a \cdot b = b \cdot a + c \cdot a - b^2 - b \cdot c,$$
$$a^2 - a \cdot b - a \cdot c = a \cdot b - b^2 - b \cdot c,$$
$$a(a-b-c) = b(a-b-c),$$
$$a = b.$$

Figiel 3.

Przyjmujemy $i = \sqrt{-1}$. Wówczas

$$\sqrt{x-y} = i \cdot \sqrt{y-x}.$$

Dla $x = a$, $y = b$ otrzymujemy

$$\sqrt{a-b} = i \cdot \sqrt{b-a}.$$

Natomiast dla $x = b$, $y = a$ mamy

$$\sqrt{b-a} = i \cdot \sqrt{a-b}.$$

Zatem

$$\sqrt{a-b} \cdot \sqrt{b-a} = i^2 \cdot \sqrt{b-a} \cdot \sqrt{a-b},$$
$$1 = i^2,$$
$$1 = -1.$$

Figiel 4.

$$i = i,$$
$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1},$$
$$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}},$$
$$\frac{\sqrt{1}}{i} = \frac{i}{\sqrt{1}},$$
$$\sqrt{1} \cdot \sqrt{1} = i^2,$$
$$1 = -1.$$

Figiel 5.

(J. Bernoulli; 1667–1748)

$$(-1)^2 = 1,$$
$$\ln(-1)^2 = \ln 1 = 0,$$
$$2\ln(-1) = 0,$$
$$\ln(-1) = 0,$$
$$-1 = e^0,$$
$$-1 = 1.$$

Figiel 6.

(J.R. d'Alembert; 1717–1783)

$$\text{Jeżeli} \quad a \cdot d = b \cdot c, \quad \text{to} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Gdy w ostatniej równości $a > b$, to również $c > d$. Przyjmijmy więc: $a = d = 1$, $b = c = -1$. Spełnione są wówczas warunki

$$a \cdot d = b \cdot c \quad \text{i} \quad a > b,$$

musi więc być

$$c > d, \quad \text{czyli} \quad -1 > 1.$$

Figiel 7.
Wiadomo (Mercator 1668 r. – właściwie Nicolaus Kauffman, 1620–1687), że dla $x \in (-1, 1]$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots$$

Zatem dla $x = 1$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots,$$

$$2\ln 2 = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots =$$

$$= \ln 2,$$

$$2 = 1.$$

Figiel 8.

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots\right) =$$

$$= \left\{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right)\right\} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = 0,$$

$$\ln 2 = \ln 1,$$

$$2 = 1.$$

Wyjaśnienie ostatnich dwóch paradoksów może sprawić pewien kłopot. Nie dość, że dotyczą one wykonywania nieskończenie wielu działań, to pojawia się w nich jeszcze swobodna zmiana kolejności składników (jak pamiętamy ze szkoły, jeśli nie ma nawiasów, to działania +, − wykonujemy w kolejności ich występowania). To właśnie zmiana porządku wyrazów w powyższych nieskończonych sumach jest przyczyną paradoksalnych wyników. Ostatnie przykłady wykazują, że nie ma prostego przejścia od „matematyki wielomianowej”, opartej na obliczeniach wykonywanych zawsze na skończonej liczbie wyrazów, do „matematyki różniczkowej”, u podstaw której leżą procesy graniczne i działania nieskończone.

Jeszcze w XVIII wieku matematycy tej miary co L. Euler (1707–1783), G.W. Leibniz (1646–1716), matematycy z rodu Bernoullich, posługiwali się działaniami nieskończonymi bardzo swobodnie, było to niemal entuzjastyczne eksperymentowanie. Choć rozróżniano wówczas szeregi zbieżne i rozbieżne (znano nawet pewne kryteria zbieżności), to dominowało przekonanie, że podstawowe prawa algebry i analizy są jednakowe. Dla ówczesnych matematyków naturalne było, że na każdym szeregu można wykonywać dowolne przekształcenia i działania, podobnie jak na funkcjach wymiernych. Akceptowano nawet argumentację bardziej metafizyczną niż matematyczną. Na przykład Guido Grandi (1671–1742), profesor matematyki w Pizie, uważał (1703 r.), że wzory postaci

$$0 + 0 + 0 + \ldots = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots =$$

$$= 1 - (1-1) - (1-1) - \ldots =$$

$$= 1 - 0 - 0 - \ldots = 1,$$

$$0 + 0 + 0 + \ldots = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots =$$

$$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2},$$

pojawienie się „nowoczesnego człowieka” (*homo sapiens sapiens*) wydawało się wskazywać, że pochodzi on bezpośrednio od Neandertalczyka. Przełom przyniosły badania szczątków obu tych gatunków znalezionych w kilku jaskiniach izraelskich. Metoda termoluminescencyjna wykazała, że w jaskini Kebara Neandertalczycy przebywali mniej więcej od 62 do 48 tys. lat temu. W pobliskiej jaskini Qafzeh *homo sapiens sapiens* pojawił się już 90–100 tys. lat temu. Metodą rezonansu spinowego poprawiono ten wynik na 120±8 tys. lat i określono wiek czaszek *homo sapiens sapiens* z jaskini Skhul na 110±10 tys. lat. Te i inne nowe odkrycia sugerują, że *homo sapiens sapiens* i *homo neandertalsis* to dwie różne gałęzie wywodzące się ze wspólnego pnia *archaic homo sapiens*. Neandertalczyk rozwinął się na Bliskim Wschodzie i w Europie, podczas gdy *homo sapiens sapiens* powstał w Afryce i stamtąd rozprzestrzenił się na wszystkie kontynenty. W Europie pojawił się około 35 tys. lat temu. Szybko wyparł Neandertalczyka i utworzył kulturę zwaną *Cro Magnon* znaną z pięknych malowideł jaskiniowych.

Niespodziewanie silnego poparcia tej hipotezie dostarczyła genetyka. W 1987 r. podjęto próbę wyznaczania wieku i genotypu wspólnego przodka badanej grupy ludzi poprzez „odtwarzanie w tył” mutacji koniecznych do wygenerowania obserwowanej różnorodności. Zrekonstruowane „drzewo genealogiczne” okazało się wyrastać z Afryki 140–290 tys. lat temu i wypuszczać odnogę na inne kontynenty 90–180 tys. lat temu. W następnych latach inne grupy opublikowały podobne rezultaty. Jednej z nich udało się odtworzyć sekwencję (397 par nukleotydów) DNA Neandertalczyka sprzed 40 tys. lat. Porównano ją z DNA 2051 ludzi i 59 szympansów. Zmierzone średnie liczby różnic

człowiek	– człowiek	8,0
człowiek z Afryki	– Neandertalczyk	27,1
człowiek z Europy	– Neandertalczyk	28,2
człowiek	– szympans	55,0

są mocnym potwierdzeniem hipotezy pochodzenia *homo sapiens sapiens* z Afryki. Gdyby pochodził on od Neandertalczyka, Europejczyk powinien by być znacznie bliższy Neandertalczykowi niż Afrykańczyk. Jako najbardziej prawdopodobny rysuje się więc scenariusz (daty w tys. lat temu):

2000	Wyodrębnienie się *homo erectus* w Afryce.
1600–800	*Homo erectus* przenosi się na inne kontynenty.
500–200	*Homo erectus* przekształca się stopniowo w archaicznego *homo sapiens*.
130–100	*Homo sapiens* w basenie Morza Śródziemnego daje początek Neandertalczykowi, który opanowuje Europę i Bliski Wschód.
150–120	*Homo sapiens* w Afryce daje początek *homo sapiens sapiens*.
110–90	*Homo sapiens sapiens* pojawia się na Bliskim Wschodzie.
około 35	*Homo sapiens sapiens* gwałtownie opanowuje całą Europę, wypierając Neandertalczyka; eksplozja kulturalna *Cro Magnon*.

To, co stało się 30–40 tys. lat temu, bez cienia przesady można nazwać eksplozją kulturalną. Wprawdzie już na długo przedtem *homo sapiens sapiens* posługiwał się narzędziami, ale nigdy nie były one specjalnie zdobione. Natomiast począwszy od wieku około 35 tys. pojawia się mnóstwo bogato zdobionych narzędzi, rzeźb i malowideł na ścianach jaskiń (fotografia na okładce). W Europie odkryto już ponad 200 jaskiń z malowidłami. Co roku odkrywane są nowe. Żadna z nich jednak nie przekracza magicznej granicy 35 000 lat. Dlaczego *homo sapiens sapiens*, genetycznie i anatomicznie niemal identyczny z nami, od 120 do 35 tys. lat temu nie rozwinął żadnej kultury? Co sie wydarzyło 35 000 lat temu? Dlaczego *Cro Magnon* nagle tak bardzo się rozprzestrzenił i całkowicie wyparł Neandertalczyka? Dlaczego zaczął zdobić narzędzia, rzeźbić, malować na ścianach jaskiń? Wydaje się, że dlatego, iż rozwinął język, zaczął używać symboli, myśleć abstrakcyjnie. Ale dlaczego nastąpiło to tak nagle i dlaczego dopiero 35 000 lat temu, a nie np. 80 000 lat wcześniej?

A może istnieją dawniejsze malowidła i rzeźby, które czekają na odkrycie? Albo pomyliliśmy się w datowaniu pierwszych *homo sapiens sapiens* lub przegapiliśmy istotne różnice anatomiczne czy genetyczne? To wszystko mało prawdopodobne, ale nie wykluczone. Odpowiedź może przybliżyć jedynie cierpliwe poszukiwanie oraz dalsze doskonalenie metod fizycznych i genetycznych.

są symbolami „tworzenia czegoś z niczego” (wynik $\frac{1}{2}$ uzyskał, przyjmując $x = 1$ we wzorze

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

i nie zdając sobie sprawy, że ma on sens jedynie dla $|x| < 1$).

Sytuacja ta trwała aż do pierwszej połowy XIX wieku, kiedy to m.in. B. Bolzano (1781–1848), A.L. Cauchy (1789–1857), N.H. Abel (1802–1829) zaczęli budować teorię zbieżności szeregów. Stworzone później teorie sumowania szeregów rozbieżnych pokazały, że pewne metody (idee) stosowane przez Eulera, Bernoullich nie są pozbawione podstaw.

Nie oznacza to jednak, że w XVIII wieku nie dostrzegano żadnych niebezpieczeństw związanych z działaniami nieskończonymi. G. Leibniz w liście z 10 stycznia 1714 r. do J. Bernoulliego (1667–1748) podaje kryterium zbieżności szeregów naprzemiennych (wcześniej pisał o tym 26 czerwca 1705 r. do J. Hermanna (1678–1733)). Dla jednego z takich szeregów (dzisiaj nazywanego *anharmonicznym*) Ch. Goldbach (1690–1764) czyni niebanalne spostrzeżenie: wyrazy ciągu $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ można połączyć znakami $+$ i $-$ tak, by suma otrzymanego szeregu była równa dowolnej liczbie rzeczywistej. Komunikuje to Eulerowi (listem z 1 października 1742 r. i latem 1752 r.). Informacja ta przechodzi jednak bez echa. Dopiero w 1853 roku B. Riemann (1826–1866) wykazuje twierdzenie (opublikowane w 1867 r.): **mając dany szereg zbieżny warunkowo, można przez zmianę porządku jego składników uzyskać szereg rozbieżny lub zbieżny do z góry danej granicy**. W tej sytuacji *zbieżność szeregów, które nie są bezwzględnie zbieżne*, jest sprawą bardzo delikatną i wciąż aktualną (dla szeregów bezwzględnie zbieżnych wszystko jest jasne: **szereg bezwzględnie zbieżny nie zmienia swej sumy po dowolnej zmianie porządku wyrazów**).

Szereg $\sum x_n$ nazywamy **bezwzględnie zbieżnym**, jeśli zbieżny jest szereg $\sum |x_n|$. Szereg zbieżny, ale nie bezwzględnie, nazywamy **warunkowo zbieżnym**.

Uzasadnienia obu wspomnianych tu twierdzeń nie są zbyt trudne i można je znaleźć np. w [2]. Przejrzenie książki [1] pozwala zorientować się, jak mocno i głęboko problematyka badania zbieżności szeregów „odpornych” na permutacje składników jest związana ze współczesnymi badaniami w zakresie analizy funkcjonalnej.

Podkreślić należy też, że w wielu fragmentach współczesnej matematyki działania nieskończone (np. szeregi) – już poprawnie zamocowane – odgrywają pierwszorzędną rolę i mają duże znaczenie praktyczne, by wspomnieć o szeregach Fouriera czy funkcjach analitycznych.

Literatura

[1] V.M. Kadets, M.I. Kadets, *Rearrangement of series in Banach spaces*, AMS, Providence, Rhode Island, 1991.

[2] W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, PWN, Warszawa, 1982.

Rozwiązanie zadania F 505.

Pod nieobecność siły ciężkości molekuły poruszałyby się chaotycznie i ich zderzenia z dnem i pokrywą naczynia równoważyłyby się. W polu siły ciężkości składowa pionowa prędkości molekuł, poruszających się w dół, zwiększa się, a molekuł poruszających się do góry – maleje. W rezultacie siła parcia na dno naczynia jest większa od siły parcia na pokrywę o tyle, ile wynosi ciężar gazu.