Klub 44

$$\sqrt[\otimes]{\textstyle\int\!\!\!\sum !}=44$$

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 1999

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1999.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 371 (WT=2,45), 372 (WT=1,50), 373 (WT=1,74) i 374 (WT=1,48) z numeru 12/1998 i 1/1999

Witold Bednorz	– Tychy	43,87
Tadeusz Józefczyk	– Poznań	42,19
Bogumiła Piotrowska	– Zielona Góra	39,07

Zadania z matematyki nr 385, 386

Redaguje Marcin E. KUCZMA

385. Wyznaczyć wszystkie liczby $\delta > 0$, dla których jest prawdziwe następujące zdanie: jeżeli $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ jest dowolną funkcją ciągłą spełniającą warunek $f(0) = f(1)$, to dla pewnej liczby x zachodzi równość: $f(x) = f(x+\delta)$.

386. Niech $n \geq 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Obliczyć maksymalną wartość, jaką może mieć suma $\sum |P_iP_j|^2$ dla n punktów $P_1, \ldots, P_n$ leżących na sferze o promieniu 1 (suma $\binom{n}{2}$ składników, odpowiadających wszystkim parom (i,j), $i<j$).

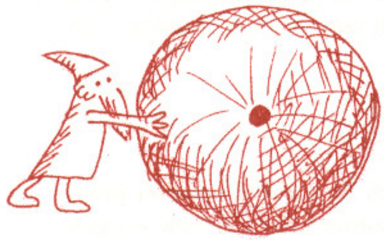
Zadanie **386** zaproponował pan Krystian Bartniczek z Würselen.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/1999

Przypominamy treść zadań:

381. Mamy dwie identyczne talie po n kart ($n \geq 3$); na kartach każdej talii są napisane liczby od 1 do n, po jednej na każdej karcie. Przy okrągłym stole siedzi n osób; każda trzyma dwie karty. Co sekundę każda osoba podaje kartę z większą liczbą sąsiadowi z prawej strony (ruch jest wykonywany jednocześnie przez wszystkie n osób). Zabawa się kończy, gdy któraś z osób ma w ręce dwie jednakowe karty. Wyznaczyć wszystkie wartości n, dla których opisany proces może trwać nieskończenie.

382. Ciąg (a_n) jest określony wzorami: $a_0 = 2$, $a_1 = a_2 = 1$ oraz $a_n = -\frac{3}{7}a_{n-1} - \frac{3}{7}a_{n-2} + \frac{4}{7}a_{n-3}$ dla $n \geq 3$. Czy szereg $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ jest zbieżny?



381. Załóżmy, że n jest liczbą nieparzystą: $n = 2k+1$. Wykażemy, że zabawa musi się zakończyć w skończonej liczbie ruchów. Obie karty, na których jest napisana liczba „1", nie ruszają się w trakcie gry. Pozycja obu kart „2" staje się także stabilna po co najwyżej dwóch ruchach. Po dalszych kilku ruchach stabilizuje się pozycja obu kart „3". I tak dalej: po skończenie wielu ruchach ustabilizuje się położenie obu kart „k" (i wszystkich kart z numerami mniejszymi) oraz położenie *jednej* karty „k+1". Jeśli gra się do tej pory nie zakończyła, karty o ustabilizowanym położeniu znajdują się u różnych osób. Druga karta „k+1" wędruje teraz wokół stołu aż do spotkania ze swoją bliźniaczką. W tym momencie zabawa się kończy.

Jeżeli natomiast n jest liczbą parzystą, to gra może trwać nieograniczenie. Wystarczy, żeby na starcie każda osoba miała w ręce jedną kartę z liczbą $\leq n/2$ i jedną kartę z liczbą $> n/2$. Po wykonaniu każdego kolejnego ruchu każda osoba nadal ma jedną kartę „dużą" i jedną „małą", więc cóż, trzeba grać dalej (wesołej zabawy).

382. Mamy tu rekurencję liniową trzeciego rzędu, o stałych współczynnikach. Wielomian charakterystyczny $x^3 + \frac{3}{7}x^2 + \frac{3}{7}x - \frac{4}{7}$ ma pierwiastki: $\alpha = \frac{4}{7}$, $\beta = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\,i)$, $\gamma = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}\,i)$. Szukamy wzoru jawnego w postaci $a_n = A\alpha^n + B\beta^n + C\gamma^n$. Podstawiając $n = 0,1,2$ (i znając wartości początkowe a_0, a_1, a_2), dostajemy układ trzech równań z niewiadomymi A, B, C, z których wyznaczamy: $A = \frac{196}{93}$, $B = \frac{1}{93}(-5+8\sqrt{3}\,i)$, $C = \frac{1}{93}(-5-8\sqrt{3}\,i)$. Po kilku nieciekawych przekształceniach postulowany wzór jawny przybiera postać:

$$a_n = \frac{1}{93}\left(196 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^n + \delta_n\right), \qquad \text{gdzie} \quad \delta_n = \begin{cases} -10 & \text{dla } n = 3k, \\ -19 & \text{dla } n = 3k+1, \\ 29 & \text{dla } n = 3k+2. \end{cases}$$

Ciąg (a_n) nie dąży do zera, więc szereg $\sum a_n$ nie jest zbieżny.

Rozwiązanie zadania M 893.
$\left[\frac{n}{k}\right]$ jest liczbą liczb całkowitych z przedziału $[1,n]$, które są podzielne przez k. Tak więc każda ze stron równości, którą należy udowodnić, jest równa sumie liczb dzielników wszystkich liczb całkowitych z przedziału $[1,n]$.

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 1999

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 272 (WT=3,70) i 273 (WT=1,33)
z numeru 2/1999

Zbigniew Galias	– Kraków	38,08
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	30,41
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	29,54
Aleksander Surma	– Myszków	22,53
Artur Arciszewski	– Kielce	15,62

Zadania z fizyki nr 282, 283

Redaguje Jerzy B. BROJAN

282. W zewnętrznym jednorodnym polu elektrycznym umieszczono prostopadle do niego dwie przewodzące płytki i zwarto je, tak że wskutek indukcji na płytkach pojawiły się ładunki przeciwnego znaku. Czy wzajemne przyciąganie tych płytek jest silniejsze, czy słabsze od rozciągającego je oddziaływania ze strony pola zewnętrznego?

283. 4 lutego br. rosyjscy kosmonauci przeprowadzili (nieudany) eksperyment z oświetleniem powierzchni Ziemi światłem słonecznym odbitym od zwierciadła umieszczonego na orbicie. Jak podawała prasa, zwierciadło było kołem o średnicy 25 m, a wysokość orbity wynosiła 360 km. Jeśli odbita wiązka światła pada na powierzchnię Ziemi prostopadle, a zwierciadło jest płaskie, to jaka jest średnica wytworzonego „zajączka"? Czy można ją zmniejszyć, stosując zwierciadło wklęsłe? Ile razy silniejsze jest oświetlenie takim zwierciadłem od Księżyca w pełni? Dane: średnica kątowa Słońca i Księżyca na niebie – około 32′, średnie albedo Księżyca (współczynnik odbicia światła od jego powierzchni) – 0,073.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1999

Przypominamy treść zadań:

278. Ocenić orientacyjnie minimalną prędkość jazdy na nartach wodnych. Przyjąć masę narciarza $m = 70$ kg, a łączną powierzchnię nart $S = 0{,}4$ m^2.

279. Jak wiadomo, dla obserwatora patrzącego znad wody obraz przedmiotów położonych w głębi wody znajduje się płycej. Czy dla obserwatora patrzącego ukośnie obraz ten jest:
a) przesunięty względem przedmiotu tylko w pionie, czy również w poziomie, a jeśli tak, to w stronę obserwatora, czy w przeciwną?
b) położony głębiej, niż dla patrzącego z góry, płycej, czy dokładnie na tej samej głębokości?

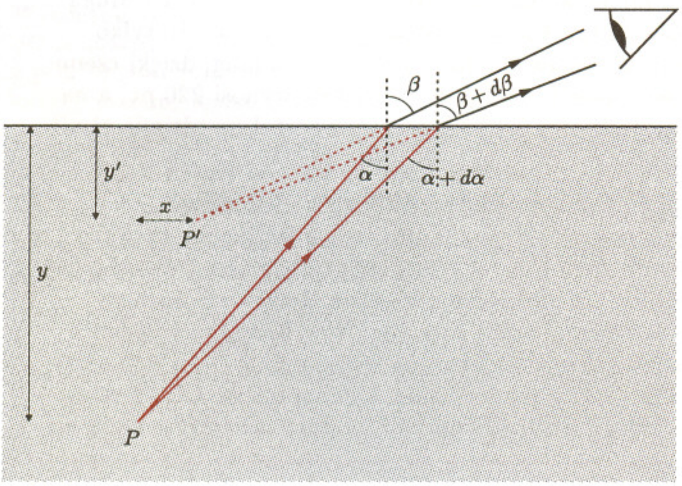
278. Jeśli narty są nachylone do poziomu pod kątem α i całkowicie zanurzone w wodzie, to pole przekroju odchylanego w dół strumienia wody wynosi $S\sin\alpha$, masa wody przepływająca w ciągu czasu Δt przez ten przekrój równa się $\varrho v\Delta t\cdot S\sin\alpha$, czyli pęd $p = mv = \varrho v^2 S\Delta t\sin\alpha$. Zmianę tego pędu wynikającą z odchylenia strumienia przez narty otrzymamy, mnożąc pęd przez $\sin\alpha$, zatem siła działająca na narty jest dana wzorem $F = \varrho v^2 S\sin^2\alpha$, a jej pionowa składowa wynosi $F_{\text{pion}} = F\cos\alpha = \varrho v^2 S\sin^2\alpha\cos\alpha$. Maksymalną wartością wyrażenia $\sin^2\alpha\cos\alpha$ jest $2/(3\sqrt{3})\approx 0{,}38$; w wyniku przyrównania $F_{\text{pion max}}$ do ciężaru narciarza mg otrzymujemy

$$v_{\min}\approx\sqrt{\frac{mg}{0{,}38\varrho S}}\approx 2{,}1\ \text{m/s}.$$

Pewne wątpliwości w powyższym rachunku może budzić obliczenie ilości wody odchylanej przez narty oraz wartość zmiany pędu. Ewentualne korekty objęłyby zależność siły nośnej od kąta α, a stąd i współczynnik 0,38 w końcowym wzorze.

279. Aby wyznaczyć położenie obrazu P', powinniśmy rozpatrzeć bieg dwóch bliskich sobie promieni wybiegających z punktu P (rys.). Niech y będzie głębokością P, n – współczynnikiem załamania wody, α i $\alpha+\mathrm{d}\alpha$ – kątami padania, β i $\beta+\mathrm{d}\beta$ – kątami załamania, y' – głębokością P', natomiast x – przesunięciem poziomym P' (z dodatnim zwrotem w stronę obserwatora). Z rysunku odczytujemy, że

$$y\operatorname{tg}\alpha = x + y'\operatorname{tg}\beta,\qquad y\operatorname{tg}(\alpha+\mathrm{d}\alpha) = x + y'\operatorname{tg}(\beta+\mathrm{d}\beta).$$



Odejmując te równania stronami, znajdujemy

$$y' = y\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\mathrm{d}\alpha)-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\beta+\mathrm{d}\beta)-\operatorname{tg}\beta}.$$

Przyrost funkcji tangens w liczniku i mianowniku należy wyrazić za pomocą jej pochodnej i podstawić prawo załamania $\sin\beta = n\sin\alpha$ (albo jego różniczkową wersję $\cos\beta\mathrm{d}\beta = n\cos\alpha\mathrm{d}\alpha$). Otrzymujemy

$$y' = y\frac{\cos^3\beta}{n\cos^3\alpha} = y\frac{(1-n^2\sin^2\alpha)^{3/2}}{n\cos^3\alpha}.$$

Jak można się przekonać, jest to malejąca funkcja zmiennej α, czyli dla obserwatora z boku obraz leży płycej – odpowiedź na pytanie b). Aby odpowiedzieć na pytanie a), wyznaczmy przesunięcie poziome x

$$x = y\operatorname{tg}\alpha - y'\operatorname{tg}\beta = y\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}(n^2-1).$$

Jak widać, wielkość ta jest dodatnia.