Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 1999

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1999.

Zadania z matematyki nr 387, 388

Redaguje Marcin E. KUCZMA

387. Ciąg liczb dodatnich $a_0, a_1, a_2, \ldots$ spełnia zależność $2^{n+1}(a_{n-1} - a_n) = a_n^2$. Wykazać zbieżność i obliczyć granicę tego ciągu (w zależności od wyrazu początkowego a_0).

388. Dla ustalonej liczby naturalnej n rozwiązać równanie

$$\left(2 - \frac{1}{x_1}\right)\left(2 - \frac{1}{x_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(2 - \frac{1}{x_n}\right) = 3$$

w liczbach całkowitych $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Zadanie **388** zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
375 (WT=1,49) i 376 (WT=1,64)
z numeru 2/1999

Witold Bednorz	– Tychy	47,00
Bogumiła Piotrowska	– Zielona Góra	39,07
Zbigniew Galias	– Kraków	35,12

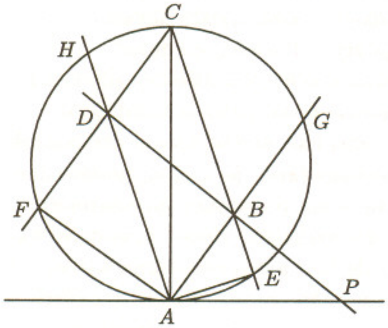
Pan Bednorz zalicza drugą rundę.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/1999

Przypominamy treść zadań:

383. Dany jest równoległobok $ABCD$ z kątem ostrym przy wierzchołku A. Okrąg o średnicy AC przecina proste CB i CD odpowiednio w punktach E i F (różnych od C). Prosta styczna do okręgu w punkcie A przecina prostą BD w punkcie P. Dowieść, że punkty E, F i P są współliniowe.

384. Udowodnić, że jeżeli p jest liczbą pierwszą, a n jest liczbą naturalną niepodzielną przez p, to liczba $p^{n!} - 1$ dzieli się przez n.



383. Z uwagi na symetrię ról punktów B i D można przyjąć, że punkt B leży między D i P. Rozważany okrąg przecina proste AB i AD odpowiednio w punktach G i H (różnych od A). Prosta AP jest styczna do okręgu, więc zachodzą równości kątów:

$$(1) \qquad \begin{gathered} |\angle BAP| = |\angle GAP| = |\angle GCA| = |\angle CAF|, \\ |\angle DAP| = |\angle HAP| = |\angle HFA| = 180^\circ - |\angle HCA| = 180^\circ - |\angle CAE|. \end{gathered}$$

Ze wzoru sinusów (dla trójkątów BAP i DAP) mamy:

$$(2) \qquad \frac{|BP|}{|AB|} = \frac{\sin|\angle BAP|}{\sin|\angle APB|}, \qquad \frac{|AD|}{|DP|} = \frac{\sin|\angle APD|}{\sin|\angle DAP|}.$$

Mnożąc stronami równości (2) i uwzględniając związki (1) dostajemy zależność

$$(3) \qquad \frac{|BP|}{|AB|} \cdot \frac{|AD|}{|DP|} = \frac{\sin|\angle BAP|}{\sin|\angle DAP|} = \frac{\sin|\angle CAF|}{\sin|\angle CAE|} = \frac{|CF|}{|CE|}.$$

Z podobieństwa trójkątów prostokątnych ABE i ADF wynika proporcja

$$(4) \qquad \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BE|}{|DF|}.$$

Mnożymy stronami związki (3) i (4), i po redukcji otrzymujemy równość

$$|DP| \cdot |BE| \cdot |CF| = |BP| \cdot |CE| \cdot |DF|,$$

która na podstawie twierdzenia Menelausa (dla trójkąta BCD) oznacza, że punkty P, E, F są współliniowe.

384. Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Dalej przyjmujemy, że $n > 1$.

Dla każdego wykładnika całkowitego $i \geq 1$ liczby p^i oraz n są względnie pierwsze. Reszty z dzielenia liczb $p, p^2, \ldots, p^n$ przez n należą do zbioru $\{1, \ldots, n-1\}$; istnieją zatem liczby całkowite i, j spełniające warunki: $1 \leq i < j \leq n$ oraz $p^i \equiv p^j \pmod{n}$. To znaczy, że n jest dzielnikiem liczby $p^j - p^i = p^i(p^r - 1)$, gdzie $r = j - i$; jest więc dzielnikiem liczby $p^r - 1$. Inaczej mówiąc, $p^r \equiv 1 \pmod{n}$. Skoro $r < n$, liczba $n!$ dzieli się przez r. Podnosimy otrzymaną przed chwilą kongruencję stronami do potęgi $(n!)/r$ i dostajemy tezę zadania: $p^{n!} \equiv 1 \pmod{n}$.

Rozwiązanie zadania M 895.
Niech A będzie sumą kątów wszystkich ścian wielościanu. Jeśli ściana ma k krawędzi, to suma jej kątów wynosi $(k-2)\pi$. Podczas sumowania względem wszystkich ścian każda krawędź jest liczona dwa razy. Stąd

$$A = (2K - 2S)\pi = (2W - 4)\pi = 2(W-2)\pi,$$

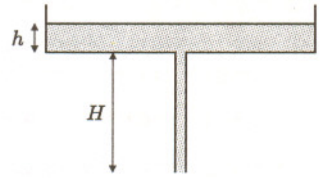
co należało wykazać.

Zadania z fizyki nr 284, 285

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 1999

284. Wąską rurkę o długości H dołączono do otworu w dnie szerokiego naczynia, do którego nalano wody na głębokość h (rys. 1). Z jaką prędkością będzie wypływać z rurki woda?



Rys. 1

285. Do źródła napięcia o okresowym przebiegu $U(t)$ przyłączono szeregowo opornik o oporności 100 Ω, zwojnicę o zmiennej indukcyjności L i amperomierz mierzący skuteczną wartość natężenia prądu I_{sk}. Dana jest tabela przedstawiająca zależność I_{sk} od L:

L [H]	0,03	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	1
I_{sk} [mA]	222	220	213	203	198	195	194

Podać wzór opisujący funkcję $U(t)$ i wartości parametrów występujących w tym wzorze. Uwaga: odpowiedź może być niejednoznaczna, za prawidłowe będzie uważane każde rozwiązanie dające dobrą zgodność z tabelą.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 274 (WT=2,11) i 275 (WT=2,50) z numeru 3/1999

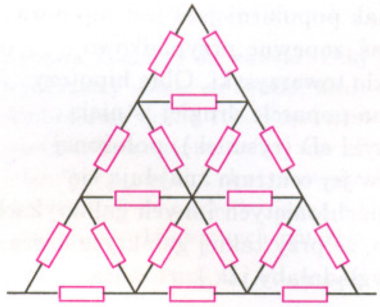
Zbigniew Galias	– Kraków	38,08
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	34,15
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	30,41
Aleksander Surma	– Myszków	22,78
Artur Arciszewski	– Kielce	15,62
Jarosław Łazuka	– Warszawa	13,90
Tomasz Rudny	– Warszawa	10,15

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/1999

Przypominamy treść zadań:

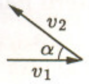
280. Pocisk artyleryjski przelatuje nad linią frontu i w tym momencie (zapewne wskutek awarii zapalnika) następuje wybuch. Jaka część odłamków spadnie po stronie A, z której nadleciał pocisk? Dana jest prędkość pocisku v_1 (skierowana poziomo i prostopadle do linii frontu) oraz prędkość odłamków v_2 względem układu związanego z pociskiem. Zakładamy, że w tym układzie wartość prędkości odłamków jest jednakowa, a wszystkie kierunki są równo prawdopodobne.

281. Osiemnaście jednakowych oporników (np. po 1 Ω) połączono w obwód przedstawiony na rysunku 2. Obliczyć opór zastępczy między dwoma wierzchołkami trójkąta (nie korzystając ze specjalistycznych programów komputerowych).



Rys. 2

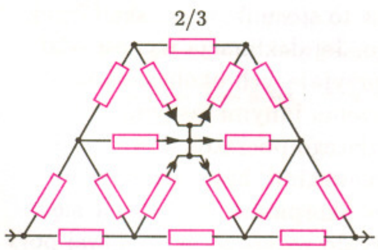
280. Prędkość odłamka w układzie Ziemi jest sumą prędkości pocisku i prędkości odłamka względem pocisku, a upadek odłamka na daną stronę zależy od znaku poziomej składowej tej sumy. Tak więc odłamek spadnie na stronę A pod warunkiem, że $v_2 > v_1$ oraz kierunek wektora $\vec{v}_2$ tworzy z kierunkiem przeciwnym do $\vec{v}_1$ kąt mniejszy od $\alpha = \arccos(v_1/v_2)$. Prawdopodobieństwo tego, że dowolnie wybrany kierunek przestrzenny tworzy z daną osią kąt mniejszy od α, jest równy stosunkowi kąta bryłowego zawartego wewnątrz stożka o kącie rozwarcia 2α do pełnego kąta bryłowego 4π (inaczej – równy stosunkowi powierzchni wyciętej z kuli przez stożek do powierzchni całej kuli). Obliczając tę powierzchnię (lub sprawdzając w poradniku matematycznym), wyznaczamy



Rys. 3

$$p = (1 - \cos\alpha)/2 = (1 - v_1/v_2)/2.$$

281. Najbardziej oczywistym z możliwych uproszczeń jest zastąpienie trzech górnych oporników przez jeden o oporze 2/3 (jednostki pomijamy). W następnym kroku narysujmy obwód w postaci równoważnej (rys. 4) i zauważmy, że z jego symetrii wynika równość prądów oznaczonych jednakowymi strzałkami. Zatem przecięcie dwóch połączeń pionowych w centrum nie wprowadzi żadnych istotnych zmian i kolejno wykorzystując standardowe wzory na opór zastępczy, dochodzimy do schematu na rysunku 5. Dalej – niestety – „zaczynają się schody", gdyż pozostaje już tylko systematyczne zastosowanie I prawa Kirchhoffa do każdego węzła, a II prawa Kirchhoffa do każdego oczka obwodu. Dzięki symetrii lewej i prawej strony oraz I prawu Kirchhoffa możemy liczbę niewiadomych natężeń prądu ograniczyć do dwóch (nie licząc całkowitego prądu I) – np. zaznaczonych na rysunku 5 jako I_1 i I_2. Teraz II prawo Kirchhoffa daje nam równania

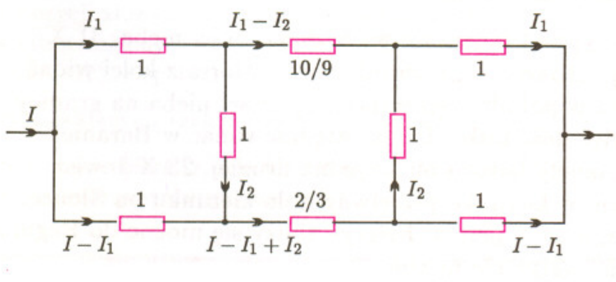


Rys. 4

$$I_1 + I_2 = I - I_1$$

$$(10/9)(I_1 - I_2) = 2I_2 + (2/3)(I - I_1 + I_2).$$

Rozwiązując je, znajdujemy $I_1 = (10/21)I$ i $I_2 = (1/21)I$. Napięcie między wyjściami obwodu (obliczone dla górnej gałęzi) wynosi



Rys. 5

$$U_{całk} = 2I_1 + (10/9)(I_1 - I_2) = (10/7)I.$$

Opór zastępczy jest więc równy (10/7) Ω.