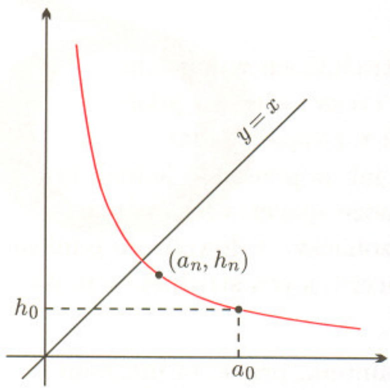
O współistnieniu konieczności i przypadku

Tomasz NOWICKI

Zjawiska ewoluujące w czasie możemy opisywać ciągami rekurencyjnymi, które określa się wzorami postaci $x_{n+1} = f(x_n)$. Ponieważ często nie znamy lub nie potrafimy kontrolować początku ciągu, więc chcielibyśmy powiedzieć coś o dalekich wyrazach ciągu niezależnie od x_0. Jeśli ciąg stabilizuje się, na przykład, gdy ma granicę, to mówimy, że zjawisko jest zdeterminowane – jakkolwiek byśmy zaczynali, znamy rezultat końcowy. Czasem, wybierając, powiedzmy, co szósty wyraz, dostaniemy podciągi zbieżne; wtedy też mówimy o determinizmie – w granicy zjawisko jest okresowe. Często jednak zachowanie ciągu wymyka się takim przewidywaniom. A czasem jest i tak, i tak. Jak? Zobaczmy na przykładzie.



Rys. 1. Gdy $a_0 h_0 > 0$, to dla wszystkich n punkt (a_n, h_n) należy do tej samej gałęzi hiperboli $xy = a_0 h_0$, do której należy (a_0, h_0). Dla $n \to \infty$ punkt (a_n, h_n) zmierza bardzo szybko do prostej $y = x$.

Średnia arytmetyczna, geometryczna i harmoniczna

Zadanie 1. *Dla $p > q > 0$ określamy dwa ciągi: $a_0 = p$, $g_0 = q$, a dalej rekurencyjnie,*

$$a_{n+1} = \frac{a_n + g_n}{2}, \qquad g_{n+1} = \sqrt{a_n g_n}\,.$$

Zbadaj zbieżność tych ciągów.

Dla $p > q > 0$ mamy $(p+q)^2 > 4pq$. Stąd również $p > (p+q)/2 > \sqrt{pq} > q$, a zatem $p \geq a_n > g_n \geq q$ dla wszystkich n, przy czym a_n maleje, a g_n rośnie. Ponadto, $|a_{n+1} - g_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_n - g_n|$, a więc oba ciągi mają wspólną granicę, którą nazywa się średnią arytmetyczno-geometryczną liczb p i q.

Zadanie 1 ilustruje twierdzenie o zbieżności ciągów monotonicznych ograniczonych w przypadku, gdy granicę trudno jest wyrazić wzorem. Czasem łatwiej przekonać się do rozumowania, gdy możemy granicy dotknąć ręką.

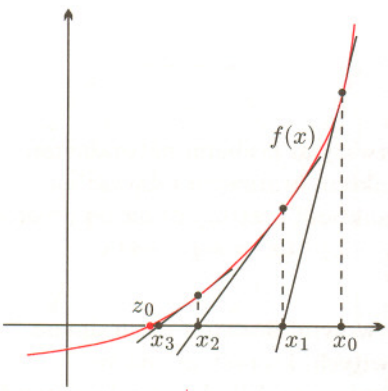
Zadanie 2. *Dla $p > q > 0$ określamy dwa ciągi: $a_0 = p$, $h_0 = q$, a dalej rekurencyjnie*

$$a_{n+1} = \frac{a_n + h_n}{2}, \qquad h_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{h_n}} = \frac{2a_n h_n}{a_n + h_n}\,.$$

Zbadaj zbieżność tych ciągów.

Podobnie jak w poprzednim zadaniu, $p \geq a_n > a_{n+1} > h_{n+1} > h_n \geq q$ (trzeba skorzystać z nierówności $(1/p + 1/q)^2 > 4/(pq)$), a oba ciągi mają wspólną granicę g, którą tym razem możemy obliczyć. Mamy bowiem $a_{n+1}h_{n+1} = a_n h_n = \ldots = a_0 h_0 = pq$, skąd $g^2 = pq$, czyli $g = \sqrt{pq}$ (rys. 1). Korzystając z tego, otrzymujemy jeden ciąg rekurencyjny

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{g^2}{a_n}\right).$$



Rys. 2. **Metoda stycznych – algorytm Newtona**. Załóżmy, że funkcja f jest ściśle wypukła (wystarczy, by $f''(x) > 0$ dla wszystkich x) i $f(z_0) = 0$. Dla dowolnego x_0 określamy ciąg

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,.$$

Punkt x_{n+1} to miejsce, w którym styczna do wykresu f w punkcie $(x_n, f(x_n))$ przecina oś OX. Ciąg (x_n) jest zbieżny do miejsca zerowego z_0, przy czym – o ile z_0 nie jest minimum f – dla x_n bliskich z_0 mamy

$$|x_{n+1} - z_0| \approx |x_n - z_0|^2,$$

co oznacza, że za każdym krokiem liczba cyfr dokładnych przybliżenia z grubsza biorąc podwaja się.

Zwróćmy uwagę, że funkcja wypukła może mieć dwa miejsca zerowe, więc trzeba uważać, gdzie się startuje. Czytelnik zechce pomyśleć, co się może dziać, gdy f nie ma miejsca zerowego lub nie jest wypukła.

Zadanie 3. *Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = (x^2 + g^2)/2x$.*

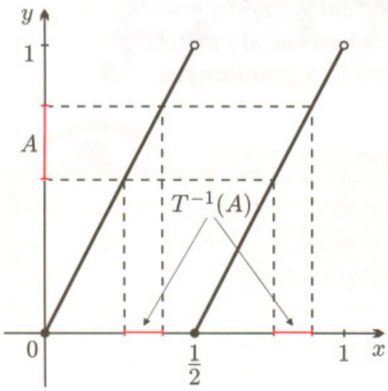
Ciąg $a_{n+1} = f(a_n)$ jest bardzo szybko zbieżny do punktu stałego funkcji f; właśnie tej procedury używają kieszonkowe kalkulatory do obliczania (przybliżeń) pierwiastków kwadratowych. Przy okazji, jest to algorytm obliczania miejsca zerowego funkcji $x^2 - g^2$ metodą stycznych (algorytm Newtona – rys. 2).

Zanim przejdziemy dalej, zauważmy, że wzory rekurencyjne ciągów a_n i h_n są jednorodne, to znaczy, że dla $\lambda > 0$ ciągi $A_n = \lambda a_n$ i $H_n = \lambda h_n$ spełniają te same warunki i wzory, co ciągi a_n i h_n (z nowymi punktami startowymi $P = \lambda p$ i $Q = \lambda q$).

Mamy tu do czynienia z sytuacją w pełni zrozumiałą, ciąg (a_n, h_n) jest bardzo szybko zbieżny. Gdybyśmy więc modelowali nim jakieś zjawisko, już po niewielu iteracjach widzielibyśmy tylko punkt zbieżności. Pełny determinizm. A przecież w ciągu tym tkwią jeszcze pewne tajemnice. Zanim je poznamy, spróbujmy opisać sytuację jak najbardziej losową.

Jedno przekształcenie o wielu obliczach

Rozpatrzmy przekształcenie T odcinka $[0,1)$ określone następująco: $Tx = 2x$ dla $0 \le x < 0{,}5$ oraz $Tx = 2x - 1$ dla $0{,}5 \le x < 1$ (rys. 3). Będziemy też pisać $Tx = 2x \bmod 1$. Oba odcinki, na których T jest ciągłe, będziemy nazywać połówkami.



Rys. 3. Wykres przekształcenia T.

Przekształcenie T nakrywa dwukrotnie $[0,1)$, a jego n-ta iteracja T^n nakrywa odcinek 2^n-krotnie, w szczególności, T^n ma $2^n - 1$ punktów stałych (rys. 4), czyli T ma $2^n - 1$ punktów okresowych o okresie n. *Czytelnik odpowie: dla ilu z tych punktów n jest najmniejszym okresem?* Każdy podprzedział, który zawiera się w jednej z połówek, przekształcenie T rozciąga dwukrotnie. Przeciwobraz dowolnego odcinka zawartego w $[0,1)$ składa się z dwóch dwa razy krótszych odcinków.

Zajmiemy się teraz zapisem dwójkowym liczb z $[0,1)$.

Rozwinięcie dwójkowe liczby $x \in [0,1)$ to jej przedstawienie w postaci

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k},$$

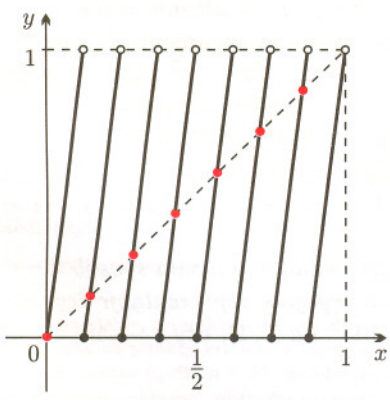
gdzie $b_k \in \{0,1\}$ jest nazywane k-tą cyfrą rozwinięcia. Czasem piszemy $[x]_2 = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$. Aby rozwinięcie było jednoznaczne, przyjmujemy, że ciąg cyfr ma nieskończoną liczbę zer. Jeśli taki ciąg ma skończoną liczbę jedynek (czyli od pewnego miejsca występują w nim same zera), to x jest liczbą postaci $q/2^n$, gdzie n jest pozycją ostatniej jedynki.

Przedział dwuadyczny $[q/2^n, (q+1)/2^n]$ dla $0 \le q < 2^n$ składa się z liczb, których rozwinięcia dwójkowe są takie same na n pierwszych pozycjach, a potem są dowolne. Długość tego przedziału wynosi $1/2^n$.

Przekształcenie T działa tak, że w rozwinięciu dwójkowym wszystkie cyfry przesuwamy o jedną pozycję w lewo, a o pierwszej cyfrze zapominamy. Każda liczba ma zakodowane wszystkie swoje iteracje w następujący sposób. Jeśli na $(k+1)$-tej pozycji w rozwinięciu dwójkowym liczby występuje zero, to $0 \le T^k x < 0{,}5$, jeśli zaś jeden, to $0{,}5 \le T^k x < 1$, czyli po k iteracjach punkt zawędruje do wskazanej połówki odcinka. Co więcej, pierwsze m cyfr rozwinięcia wskazuje, do którego przedziału dwuadycznego $[q/2^m, (q+1)/2^m)$ należy liczba. Liczba o ustalonych m cyfrach na pozycjach od $k+1$ do $k+m$ trafi po k iteracjach do przedziału długości 2^{-m} wyznaczonego przez te cyfry. Teraz widać, że można znaleźć mnóstwo liczb, które pod działaniem przekształcenia T będą trafiały do kolejnych, z góry danych odcinków.

Zadanie 4. *Znajdź długość sumy odcinków złożonych z liczb, które dokładnie w k-tej iteracji trafią do zadanego przedziału dwuadycznego. Znajdź długość sumy odcinków złożonych z liczb, które nie odwiedzą zadanego przedziału dwuadycznego przed k-tą iteracją.*

Zauważmy, że jeśli dwa punkty są różne, to któraś iteracja wepchnie je do różnych połówek, a jeśli wtedy oba będą blisko środka, to następna odepchnie je do przeciwległych końców odcinka $[0,1)$. Mamy więc przekształcenie, które produkuje ciągi o wielu własnościach: są okresowe o dowolnie zadanym okresie, są inne – odwiedzające każdy odcinek; bliskie punkty rozjeżdżają się, odległe wpadają na siebie. Czy jest tu jakaś regularność?



Rys. 4. Przekształcenie $T \circ T \circ T = T^3$ ma $2^3 - 1 = 7$ punktów stałych.

Losowanie i statystyka

Teraz zaczniemy rzucać monetą. Wyniki kolejnych rzutów kodujemy jako zera (dla orłów) i jedynki (dla reszek). Jeśli rzucimy n razy, otrzymamy ciąg orłów i reszek, który kodujemy w postaci przedziału dwuadycznego $[q/2^n, (q+1)/2^n)$, wypisując rozwinięcie dwójkowe liczby $q/2^n$ – kolejne cyfry po przecinku to wyniki kolejnych rzutów. Zauważmy, że dodanie następnego rzutu to wybranie którejś połowy już otrzymanego przedziału.

Taki sposób kodowania rzutów ma dodatkową zaletę: dla monety symetrycznej szansa otrzymania ciągu orłów i reszek, który spełnia te czy inne z góry narzucone warunki (np. w ciągu dziesięciu rzutów nie ma trzech kolejnych reszek), odpowiada długości sumy przedziałów dwuadycznych określonych przez owe warunki (w tym przykładzie chodzi o przedziały $[q2^{-10}, (q+1)2^{-10})$, dla których w rozwinięciu $q2^{-10}$ nie ma trzech kolejnych jedynek).

W języku rzutów monetą przekształcenie T to zapominanie o wyniku pierwszego rzutu. Zastosowanie k-tej iteracji przekształcenia to odrzucenie pierwszych k rzutów. Długość przedziałów po przekształceniu odpowiada

Centralne Twierdzenie Graniczne. *Jeśli S_n oznacza liczbę sukcesów w n próbach Bernoulliego z ustalonym prawdopodobieństwem sukcesu p, to*

$$P((S_n - np)/\sqrt{np(1-p)} \leq t) \to F(t)$$

dla $n \to \infty$, gdzie F jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego,

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp(-x^2/2)\,\mathrm{d}t\,.$$

Przykład. Szansa, że w długiej serii rzutów monetą wśród rzutów od 401 do 500 będzie co najwyżej 60 orłów, jest równa $P(S_{100} \leq 60) = P((S_{100} - 50)/\sqrt{25} \leq 2) \approx F(2)$.

Podobnie, łączna długość przedziałów dwuadycznych, w których rozwinięcia liczb mają na pozycjach od 401 do 500 co najwyżej 60 zer, jest równa około $F(2)$. Są to te liczby, które po 400 początkowych iteracjach przekształcenia T w stu kolejnych odwiedzą dolną połowę przedziału $[0,1)$ co najwyżej 60 razy.

prawdopodobieństwu warunkowemu, z warunkiem opisanym przez początkowe k rzutów.

Cokolwiek możemy powiedzieć o seriach niezależnych rzutów monetą symetryczną, możemy też powiedzieć o liczbach dwuadycznych i przekształceniu T. A zatem, jeśli obserwujemy zjawisko, które można opisać za pomocą iteracji T, to mamy do czynienia z sytuacją czysto losową i po pominięciu początkowych obserwacji możemy posługiwać się metodami statystycznymi, na przykład centralnym twierdzeniem granicznym.

Wracamy do początku

Wzoru rekurencyjnego na średnie: arytmetyczną i harmoniczną możemy użyć nie tylko dla liczb dodatnich. Jeśli obie liczby p, q są ujemne, to dzięki jednorodności otrzymujemy ten sam wynik, co dla obu dodatnich. Jeśli jednak jedna jest dodatnia, a druga ujemna, to (pomijając drobny kłopot, kiedy $a_n + h_n = 0$) tak już pozostanie dla wszystkich n, bo niezmienniczy iloczyn $a_n h_n$ będzie stale ujemny. Przeskalujmy zmienne do $pq = -1$, wtedy też $a_n h_n = -1$ dla każdego n. Tym razem dla h_n dostajemy

$$h_{n+1} = \frac{2a_n h_n}{a_n + h_n} = \frac{-2}{-\frac{1}{h_n} + h_n} = \frac{2h_n}{1 - h_n^2}$$

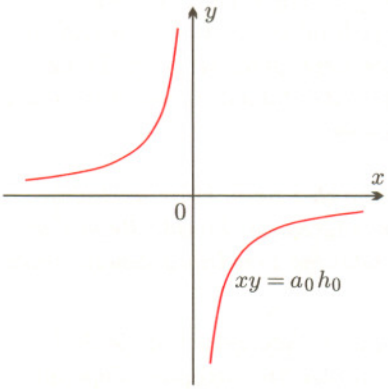
i pozostaje zbadać funkcję $x_1 = f(x) = 2x/(1-x^2)$. Zauważmy, że podstawiając $x = \mathrm{tg}\alpha$, gdzie $\alpha \in [-\pi, \pi)$, otrzymamy znajomy szkolny wzór na tangens kąta 2α:

$$\mathrm{tg}\alpha_1 = x_1 = \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} = \mathrm{tg}2\alpha\,,$$

co po przetłumaczeniu na kąty, już bez tangensów, i zadbaniu, aby α_1 należało do $[-\pi, \pi)$, daje warunki $\alpha_1 = 2\alpha$ dla $\alpha \in [-\pi, 0)$ oraz $\alpha_1 = 2\alpha - 2\pi$ dla $\alpha \in [0, \pi)$. Po liniowym przeskalowaniu dostaniemy dla $\beta = (\alpha + \pi)/2\pi$ równość

$$\beta_1 = 2\beta \bmod 1.$$

Oznacza to, że gdy $a_0 h_0 < 0$, to elementy ciągu (a_n, h_n) zachowują się tak losowo, jak przekształcenie T, czyli jak niezależne rzuty monetą symetryczną (rys. 5).



Rys. 5. Gdy $a_0 h_0 < 0$, to punkt (a_n, h_n) skacze w chaotyczny sposób po obu gałęziach hiperboli $xy = a_0 h_0$ (wnikliwi Czytelnicy zechcą poeksperymentować sami).

Rodzina kwadratowa

Nasze rozważania o dwóch średnich można przenieść do dziedziny zespolonej. Tam również spotykamy współistnienie konieczności i przypadku.

Przekształcenie $\phi \mapsto 2\phi \bmod 1$ jest to przeskalowane przekształcenie zespolone $z \mapsto z^2$ na okręgu jednostkowym, gdzie patrzymy tylko na argument. Z drugiej strony, we współrzędnych (x, y) mamy $(x, y) = z \mapsto z^2 = (x^2 - y^2, 2xy)$, a ponieważ jesteśmy na okręgu S^1, gdzie $-y^2 = x^2 - 1$, więc pierwsza współrzędna punktu z, która należy do przedziału $[-1, 1]$, poddawana jest przekształceniu kwadratowemu $x \mapsto 2x^2 - 1$. Widzimy zatem, że $f(x) = 2x^2 - 1$ jest innym przedstawieniem tego samego zjawiska, co $\phi \mapsto 2\phi \bmod 1$.

Zadanie 5. *Sprawdź, że zmieniając liniowo współrzędne w ten sam sposób w dziedzinie i przeciwdziedzinie, można dostać następujące reprezentacje tego przekształcenia: $y \mapsto y^2 - 2$ na $[-2, 2]$, $t \mapsto (2t-1)^2$ na $[0, 1]$, czy $u \mapsto 4u(1-u)$ na $[0, 1]$. Wykonaj rysunki (wraz z przekątną).*

W ostatnim wzorze dokonaj zamiany współrzędnych $u = \sin^2(\pi\phi/2)$.

Samo przekształcenie $z \mapsto z^2$ w dziedzinie zespolonej zachowuje się tak: wewnątrz okręgu jednostkowego wszystko zbiega w szaleńczym tempie do zera, a na zewnątrz ucieka równie szybko do nieskończoności (to w istocie to samo – wystarczy przecież zmienić z na $1/z$). Natomiast na samym okręgu nie mamy wcale takiego determinizmu; tu panuje losowość, poddająca się jednak prawom statystycznym.

Rozwiązanie zadania F 512. Zadanie rozwiązujemy podobnie jak poprzednie, otrzymując

$$F = pS = \frac{2\alpha}{d}S\,,$$

gdzie d jest grubością krążka cieczy, a $S = \pi R^2$ jego polem powierzchni. Ale

$$d = \frac{V}{S} = \frac{m}{\rho\pi R^2}$$

i stąd

$$F = \frac{2\pi^2\alpha\rho R^4}{m} \approx 840\ \mathrm{N}\,.$$