2/00 (26)

$\Gamma \lim_{n\to\infty}$atias

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (20′)

Wyjaśnienie oszustwa (20):

Oszustwo dosyć prymitywne – *oczopląs przy ułamkach*. Końcówka rozwiązania powinna wyglądać następująco:

$$\frac{\dfrac{ab}{(a,b)}\cdot\dfrac{bc}{(b,c)}\cdot\dfrac{ca}{(c,a)}}{\dfrac{a^2b^2c^2}{(a,b,c)^2}}=\frac{ab\cdot bc\cdot ca}{a^2b^2c^2}\cdot\frac{(a,b,c)^2}{(a,b)\cdot(b,c)\cdot(c,a)}=$$

$$=\frac{(a,b,c)^2}{(a,b)\cdot(b,c)\cdot(c,a)},$$

a zatem zamiast podanej w zadaniu równości prawdziwa jest równość

$$\frac{[a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a]}{[a,b,c]^2}=\frac{(a,b,c)^2}{(a,b)\cdot(b,c)\cdot(c,a)}\,.$$

JWR

GRY (10)

Znamy już precyzyjną definicję gry. Teraz nauczymy się dodawać gry. Można dodać dowolną (skończoną) liczbę gier, ale najlepiej wyjaśnić operację dodawania w przypadku sumy dwóch gier. Niech dane będą gry

$$G=\{G_1,G_2,G_3,\ \ldots\ ,G_n\}\ \text{ i }\ H=\{H_1,H_2,H_3,\ \ldots\ ,H_m\}\,.$$

Przypominamy, że pierwszy z powyższych zapisów oznacza, iż pierwszy ruch w grze G polega na wyborze jednej z pozycji (czyli też gier w przyjętym przez nas sensie) $G_1,G_2,\ldots,G_n$, które to pozycje będziemy nazywać opcjami gry G.

Sumą gier G i H nazwiemy grę

$$G\oplus H=\{G_1\oplus H,\ G_2\oplus H,\ G_3\oplus H,\ \ldots\ ,G_n\oplus H,\ G\oplus H_1,\ G\oplus H_2,\ G\oplus H_3,\ \ldots\ ,G\oplus H_m\}\,.$$

Zastanówmy się nad powyższą definicją. Aby dodać gry G i H, musimy umieć dodać grę H do dowolnej opcji gry G oraz grę G do dowolnej opcji gry H. Nie stanowi to problemu, gdyż, jak widzieliśmy poprzednio, gry tworzone są stopniowo *z niczego*, zatem opcje $G_1,G_2,\ \ldots\ ,G_n$ gry G są prostsze (zostały utworzone wcześniej) niż sama gra G.

Jaka jest interpretacja sumy gier? Wyobraźmy sobie, że gramy z kimś jednocześnie w dwie gry, stosując następującą zasadę wykonywania ruchów: gracz wybiera jedną z gier, a następnie wykonuje ruch w tej grze. Po tym przeciwnik wybiera jedną z gier (tę samą lub inną) i wykonuje w niej ruch. I tak dalej. Może się zdarzyć, że zawodnik wykonuje w jednej ze składowych gier kilka ruchów z rzędu, podczas gdy przeciwnik zajęty jest wykonywaniem ruchów w drugiej grze. Sumą gier jest gra *Nim*: podstawową grą jest zabójczo nudna gra z jednym stosem, podczas gdy już suma trzech takich gier ma nieoczywistą strategię wygrywającą.

Nie będziemy się zbytnio wdawać w teoretyzowanie, wspomnimy tylko, że dodawanie gier jest przemienne i łączne.

Popatrzmy, jak dodawanie działa na najprostszych grach.

$0\oplus 0=\{\}\oplus\{\}=\{\}=0$ – mając do wyboru dwie gry, w żadnej z których nie mamy legalnego ruchu, nie jesteśmy w stanie wykonać ruchu i przegrywamy natychmiast.

Ogólniej, $0\oplus G=G\oplus 0=G$ dla dowolnej gry G. Co z tego, że do gry G dodano grę 0, skoro i tak nie można wykonać w niej ruchu. Powyższa równość tłumaczy, dlaczego grę $\{\}$ nazwaliśmy 0.

$1\oplus 1=\{0\}\oplus\{0\}=\{0\oplus 1,1\oplus 0\}=\{1,1\}=\{1\}$. Zauważmy, że utożsamiamy gry $\{1,1\}$ i $\{1\}$. Formalnie ich struktura jest inna, ale efekt rozgrywki taki sam. W pierwszej z nich gracz rozpoczynający może przejść do pozycji 1 na dwa sposoby, w drugiej na jeden. Nie ma to żadnego znaczenia. Gra $\{1\}$ może mieć następującą realizację: jeden z graczy ma w kieszeni jedną bierkę, w swoim ruchu może ją wyjąć i położyć na stole (nie dopuszczamy innego zachowania gracza), gracz drugi bierze bierkę ze stołu i mówi *wygrałem*, koniec gry. Analogiczna realizacja gry $\{1,1\}$ jest następująca: jeden z graczy ma w kieszeni dwie bierki, w swoim ruchu może położyć na stole jedną z nich, gracz drugi bierze bierkę ze stołu i mówi *wygrałem*. Fakt, że pierwszy gracz miał możliwe 2 ruchy (bo mógł wybrać jedną z 2 bierek), nie zmienił niczego, gdyż praktycznie były one nierozróżnialne.

Podobnie stwierdzamy, że

$$2\oplus 1=\{0,1\}\oplus\{0\}=\{0\oplus 1,1\oplus 1,2\oplus 0\}=\{1,\{1\},2\}$$

oraz

$$1\oplus 1\oplus 1=1\oplus\{1\}=\{0\}\oplus\{1\}=\{0\oplus\{1\},1\oplus 1\}=$$
$$=\{\{1\},\{1\}\}=\{\{1\}\}\,.$$

Zachęcamy Czytelników do samodzielnego przeanalizowania struktury gier występujących w powyższych przykładach.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław WróblewskiΓInstytut Matematyki Uniwersytetu WrocławskiegoΓPlac Grunwaldzki 2/4Γ50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl