Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2000

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2000.

Zadania z matematyki nr 403, 404

Redaguje Marcin E. KUCZMA

403. Ciągi $b(0), b(1), b(2), \ldots$ oraz $d(0), d(1), d(2), \ldots$ są określone wzorami:

$$b(0) = d(0) = 1, \qquad b(n+1) = 2^{b(n)}, \qquad d(n+1) = 10^{d(n)}.$$

Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną n, dla której $b(n) > d(44)$.

404. Udowodnić, że liczba wszystkich podziałów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na zbiory niepuste, rozłączne, jest równa wartości, jaką przyjmuje w punkcie $x = 0$ pochodna n-tego rzędu funkcji $f(x) = \exp(e^x - 1)$.

Zadanie **404** zaproponował pan Piotr Żmijewski z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/2000

Przypominamy treść zadań:

395. Liczby rzeczywiste $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2000}$ tworzą ciąg monotoniczny. Udowodnić, że

$$\sum_{k=0}^{2000} (-1)^k a_k^2 \geq \left(\sum_{k=0}^{2000} (-1)^k a_k \right)^2.$$

396. Dane są dwie przecinające się sfery oraz sześć różnych punktów A, B, C, D, E, F. Punkty A i B leżą na jednej z tych sfer, punkty C i D na drugiej; punkty E i F należą do obu sfer. Punkt E leży na odcinku AC, a punkt F leży na odcinku BD, który jest równoległy do prostej przechodzącej przez środki danych sfer. Dowieść, że rzuty prostokątne odcinków AB i CD na prostą AC mają jednakową długość.

395. Dowodzimy przez indukcję, że jeżeli liczby $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ tworzą ciąg monotoniczny, to

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k^2 \geq \left(\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \right)^2.$$

Dla $n = 0$ zachodzi równość. Ustalmy $n \geq 0$ i przyjmijmy słuszność dowodzonej tezy dla tej liczby n. Weźmy pod uwagę dowolne liczby $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2n}, a_{2n+1}, a_{2n+2}$ tworzące ciąg monotoniczny. Przyjmijmy oznaczenia

$$a_{2n+1} = u, \quad a_{2n+2} = v, \quad \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k = s, \quad \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k^2 = w.$$

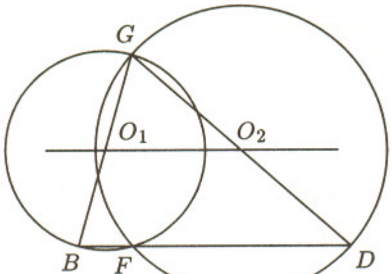
Założenie indukcyjne (dla ciągu $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$) mówi, że $w \geq s^2$; teza indukcyjna przybiera postać $w - u^2 + v^2 \geq (s - u + v)^2$. Dla jej dowodu wystarczy wykazać, że

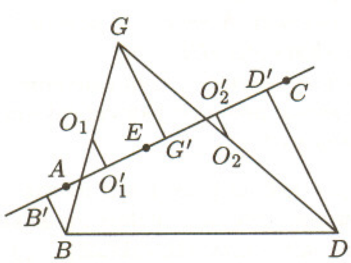
$$s^2 - u^2 + v^2 \geq (s - u + v)^2;$$

to zaś wynika z przekształcenia

$$s^2 - u^2 + v^2 - (s - u + v)^2 = 2(s - u)(u - v)$$

i ze spostrzeżenia, że liczby $s - u = a_0 - a_1 + \ldots + a_{2n} - a_{2n+1}$ oraz $u - v = a_{2n+1} - a_{2n+2}$ są jednocześnie nieujemne lub niedodatnie. To kończy dowód indukcyjny. Dla $n = 1000$ mamy tezę zadania.





396. Oznaczmy przez O_1 środek sfery zawierającej punkty A, B, E i F, a przez O_2 środek sfery zawierającej punkty C, D, E i F. Równoległe proste O_1O_2 i BD wyznaczają płaszczyznę, która przecina obie sfery wzdłuż ich okręgów wielkich. Jednym z punktów przecięcia tych okręgów jest F; oznaczmy ich drugi punkt przecięcia przez G. Odcinki BG i DG są średnicami danych sfer.

Niech O_1', O_2', B', D', G' będą rzutami prostokątnymi punktów O_1, O_2, B, D, G na prostą AC. Punkt O_1' jest środkiem cięciwy AE pierwszej z rozważanych sfer; a ponieważ O_1 jest środkiem jej średnicy BG, to O_1' jest jednocześnie środkiem odcinka $B'G'$; zatem $|AB'| = |EG'|$. Analogicznie uzasadniamy, że O_2' jest wspólnym środkiem odcinków $D'G'$ i CE, więc $|CD'| = |EG'|$. Otrzymujemy równość $|AB'| = |CD'|$, która była dana do udowodnienia.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 387 (WT=1,97) i 388 (WT=1,27) z numeru 10/1999

Janusz Olszewski	– Suwałki	44,68
Andrzej Daniluk	– Kraków	43,64
Krzysztof Zapisek	– Warszawa	42,22
Rafał Pikuła	– Wrocław	41,33
Jarosław Łazuka	– Warszawa	36,01
Jerzy Witkowski	– Radlin	34,62

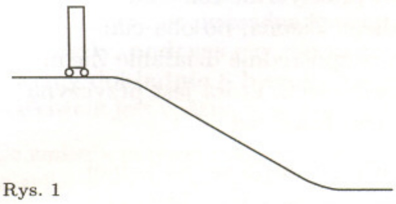
Pan Olszewski (Weteran) kończy już czwartą rundę.

Zadania z fizyki nr 300, 301

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2000

300. Przedstawiony na rysunku 1 przekrój pochylni składa się z odcinka o długości $l = 2$ m nachylonego pod kątem $\alpha = 30°$ do poziomu oraz dwóch łuków o promieniu $R = 10$ m gładko łączących ten odcinek z półprostymi poziomymi. Na górnym poziomie postawiono wózek i nadano mu bardzo niewielką prędkość w prawo. Czy w czasie zjazdu wózek oderwie się jedną parą kółek od podłoża? Korpus wózka jest jednorodną płytką prostopadłościenną o długości $d = 5$ cm i wysokości $h = 20$ cm (trzeci wymiar jest nieistotny), osie kółek są osadzone na końcach dolnego boku płytki (tzn. w odległości 5 cm), a masę kółek, ich promień i tarcie należy pominąć. Uwaga: wystarczające jest rozwiązanie przybliżone, słuszne dla podanych wartości liczbowych.



Rys. 1

301. Z jednorodnego drutu o oporze ρ na jednostkę długości wykonano pięciokąt foremny o boku a. Ile wynosi wartość indukcji magnetycznej B w środku tego pięciokąta, jeśli do dwóch sąsiednich wierzchołków pięciokąta przyłączyć źródło napięcia U? Pominąć pole przewodów doprowadzających i przyjąć względną przenikalność magnetyczną ośrodka równą 1.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/2000

Przypominamy treść zadań:

292. Jednorodna bryła ma kształt graniastosłupa, którego podstawa jest n-kątem foremnym. Dla jakich n bryła ta może się toczyć po poziomej powierzchni, tzn. po zetknięciu ściany z podłożem będzie się dalej obracała w tę samą stronę, bez poślizgu? Można przyjąć, że siła działa ze strony podłoża tylko na kolejne krawędzie graniastosłupa i ma charakter niesprężysty, tzn. bryła nie podskakuje.

Pytanie poza konkursem: Jeśli n spełnia powyższy warunek, to ile wynosi podczas toczenia się bryły maksymalna liczba „przeskoków" od jednej krawędzi do następnej (uwarunkowana z jednej strony tym, aby bryła pokonała wzniesienie między przeskokami, a z drugiej strony tym, aby siła odśrodkowa nie oderwała jej od podłoża)? Pominąć straty energii poza przeskokami.

Idea zadania pochodzi od dr. Sławomira Brzezowskiego z Krakowa, a została przekazana przez jego uczniów – zwycięzców Olimpiady Fizycznej.

293. Po napompowaniu powietrza do komory ciśnieniowej w dolnej części ustawionej pionowo rury metalowej (rys. 2) zwolniono tłok, który został wyrzucony w górę (tłokiem tym może być zabawka, np. flara opadająca na spadochronie). Obliczyć wysokość osiąganą przez ciężarek o masie 0,4 kg, jeśli rura ma długość 2 m (z czego 75 cm zajmuje komora ciśnieniowa) i średnicę wewnętrzną 28 mm, ciśnienie atmosferyczne wynosi 10^5 Pa, a ciśnienie w komorze w chwili zwolnienia spustu – $5 \cdot 10^5$ Pa. Ponadto dana jest wartość stosunku ciepeł właściwych dla powietrza $\gamma = c_p/c_V = 1{,}4$.

Rys. 2

292. W momencie zetknięcia ściany graniastosłupa z podłożem następuje „zderzenie" – na krawędź graniastosłupa będącą nową osią obrotu działa przez krótką chwilę duża siła ze strony podłoża. W tym krótkim przedziale czasu rolę siły ciężkości można zaniedbać, więc obowiązuje zasada zachowania momentu pędu względem nowej osi. Przedstawiając moment pędu jako sumę składnika pochodzącego od ruchu środka masy i składnika odpowiadającego ruchowi wokół środka masy, otrzymujemy równanie (zob. rys. 3)

$$mr^2\omega_0\cos\alpha + I\omega_0 = (I + mr^2)\omega_1,$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenia:

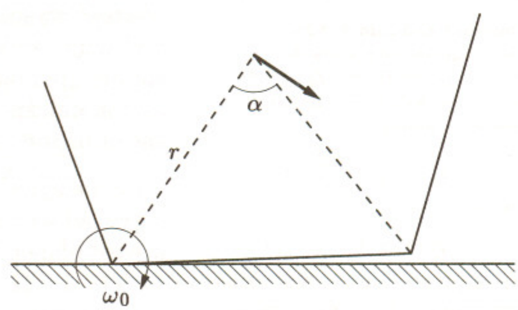
m – masa bryły,
r – promień okręgu opisanego na jej podstawie,
ω_0 i ω_1 – prędkości kątowe przed „zderzeniem" i po nim,
I – centralny moment bezwładności graniastosłupa.
$\alpha = 360°/n$ – kąt utworzony przez dwie sąsiednie krawędzie i oś graniastosłupa,

Równanie to ma sens pod warunkiem, że lewa strona jest dodatnia (inaczej bryła się zatrzyma), tak więc szukany warunek ma postać

$$mr^2\cos\alpha + I > 0.$$

Widzimy, że tylko dla $n = 3$ nierówność może nie być spełniona, gdyż wtedy $\alpha = 120°$ i pierwszy składnik jest ujemny. Jak można obliczyć, centralny moment bezwładności trójkąta równobocznego wynosi $I = (1/4)mr^2$, czyli ujemny składnik przeważa. Graniastosłup trójkątny nie może się więc toczyć (proponujemy Czytelnikom sprawdzić na czekoladzie *Toblerone*).

Obliczenia prowadzące do odpowiedzi na pytanie dodatkowe są nieco zbyt długie, aby je zamieścić na stronach *Delty*. O ile Autor się nie pomylił, to prostopadłościan ($n = 4$) może się przewrócić tylko raz, dla $n = 5$ możliwe są dwa kolejne przeskoki, dla $n = 6$ – trzy, dla $n = 7$ – cztery, a dla wyższych n liczba przeskoków rośnie coraz szybciej.



Rys. 3

293. Ze względu na dużą szybkość rozprężenia powietrza założymy, że jest to przemiana adiabatyczna, tzn. spełnione jest równanie $pV^\gamma = \text{const}$. Energia przekazana „pociskowi" przez rozprężający się gaz jest dana wyrażeniem $W = \int(p - p_{\text{atm}})\mathrm{d}V$, a po podstawieniu powyższej zależności $p(V)$ i scałkowaniu obliczamy

$$W = \frac{p_0V_0}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1}\right) - p_{\text{atm}}(V_1 - V_0) = 110 \text{ J}.$$

Jeśli straty są pomijalnie małe, to energia ta pozwala ciału o masie 0,4 kg wznieść się na wysokość 28 m.