Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2000.

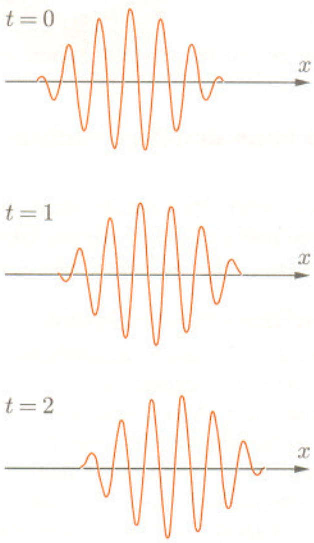
Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2000

Przypominamy treść zadań:

296. Gęstość masy pewnej planety zależy liniowo (tzn. wg wzoru $\rho = \rho_0 - kr$) od odległości r od jej środka, przy czym na powierzchni planety spada do 1/4 gęstości maksymalnej. W jakiej odległości od środka natężenie pola grawitacyjnego jest maksymalne?

297. Jak wiadomo, ruch elektronu należy rozpatrywać jako rozprzestrzenianie się fali o długości danej wzorem $\lambda = h/p$. Częstotliwość tej fali z kolei możemy znaleźć ze wzoru $\nu = E/h$ (wzór ten najczęściej bywa podawany w związku z kwantami promieniowania, ale jednak stosuje się także do cząstek mających masę – vide równanie Schrödingera). Dla elektronu swobodnego $E = E_{\text{kin}} = mv^2/2$ (o ile prędkość jest nieduża w porównaniu z prędkością światła), a dalej, mnożąc długość fali przez jej częstotliwość, otrzymamy prędkość $v = \lambda\nu = E/p = v/2$. Gdzie tkwi błąd?



Paczka falowa reprezentująca elektron (obraz w kolejnych chwilach).

296. Natężenie pola grawitacyjnego jest dane wzorem $g(r) = \frac{\mathrm{G}M(r)}{r^2}$, gdzie $M(r)$ jest masą zawartą wewnątrz kuli o promieniu r, czyli $M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r) r^2 \mathrm{d}r$. Otrzymujemy $M(r) = 4\pi r^3(\rho_0/3 - kr/4)$, $g(r) = \mathrm{G} \cdot 4\pi r(\rho_0/3 - kr/4)$. Nietrudno przekonać się, że jeśli funkcja $\rho(r)$ osiąga wartość $\rho_0/4$ dla $r = R$ (promień planety), to $g(r)$ osiąga swoją maksymalną wartość dla $r = (8/9)R$.

297. W mechanice kwantowej rozpatruje się elektron jako tzw. paczkę falową, czyli falę o ograniczonych rozmiarach przestrzennych (rys.). Okazuje się, że prędkość przemieszczania się całej paczki (czyli prędkość elektronu) nie jest równa prędkości przemieszczania się maksimów fali; pierwszą z tych prędkości nazywa się prędkością grupową, a drugą – prędkością fazową. Wyprowadzony w treści zadania paradoksalny wzór oznacza w istocie, że prędkość fazowa fali elektronowej jest dwukrotnie mniejsza od jej prędkości grupowej.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2000

Przypominamy treść zadań:

399. Niech $n > 1$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Ile jest permutacji $(x_1, \ldots, x_n)$ zbioru $\{1, \ldots, n\}$ o tej własności, że dla każdego $i = 1, \ldots, n-1$ różnica $x_i - x_{i+1}$ dzieli się przez i?

400. Znaleźć wszystkie pary funkcji f, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mających ciągłe pochodne drugiego rzędu, spełniających równania $(fg)' = f'g'$ oraz $(fg)'' = f''g''$ i takie, że iloczyn fg nie jest funkcją stałą.

399. Jest jasne, że w dowolnej „dobrej" permutacji $(x_1, \ldots, x_n)$ zbioru $\{1, \ldots, n\}$ ostatnie dwa miejsca muszą być zajęte przez liczby 1 oraz n. Jeśli ostatni wyraz takiej permutacji jest równy n, będziemy ją nazywali permutacją typu α; gdy ostatni wyraz jest jedynką, będziemy mówili, że permutacja jest typu β.

Jeżeli $(x_1, \ldots, x_n)$ jest „dobrą" permutacją typu α (a więc jeżeli $x_n = n$, $x_{n-1} = 1$), to $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ jest „dobrą" permutacją zbioru $\{1, \ldots, n-1\}$, typu β.

Jeśli natomiast $(x_1, \ldots, x_n)$ jest „dobrą" permutacją typu β ($x_n = 1$, $x_{n-1} = n$), wówczas $(x_1 - 1, \ldots, x_{n-1} - 1)$ jest „dobrą" permutacją zbioru $\{1, \ldots, n-1\}$, typu α.

To ustala bijekcję między „dobrymi" permutacjami zbiorów $\{1, \ldots, n\}$ oraz $\{1, \ldots, n-1\}$. Zatem liczba „dobrych" permutacji jest taka sama dla każdego n. Dla $n = 2$ są dwie takie permutacje. Stąd wniosek, że dla każdego n istnieją dokładnie dwie „dobre" permutacje.