3. Minimalizacja sumy n-tych potęg odległości

Mamy teraz przypadek, gdy funkcja φ jest postaci

$$\varphi_n(x) = |x_1|^n + |x_2|^n + |x_3|^n \tag{9}$$

i jedynym ograniczeniem jest warunek

$$f(x) = \frac{1}{2}ax_1 + \frac{1}{2}bx_2 + \frac{1}{2}cx_3 - S = 0.$$

Wówczas zgodnie z zasadą Lagrange'a mamy

$$\begin{aligned} nx_1^{n-1} &= \frac{1}{2}\lambda a, \\ nx_2^{n-1} &= \frac{1}{2}\lambda b, \\ nx_3^{n-1} &= \frac{1}{2}\lambda c, \end{aligned} \tag{10}$$

skąd otrzymujemy

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{n-1} = \frac{a}{b}, \quad \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n-1} = \frac{a}{c},$$

a co po przekształceniu daje nam

$$\frac{x_1}{x_2} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/(n-1)}, \quad \frac{x_1}{x_3} = \left(\frac{a}{c}\right)^{1/(n-1)}. \tag{11}$$

Jeśli teraz założymy, że $n \to \infty$, to prawe strony równości w (11) dążą do 1. To sugeruje, że ciąg $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)})$ punktów minimum funkcji $\varphi_n(x)$ dąży przy $n \to \infty$ do punktu $x^{(\infty)}$, dla którego $x_1^{(\infty)} = x_2^{(\infty)} = x_3^{(\infty)}$; tzn. $x^{(\infty)}$ jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt.

Można inaczej dowieść zbieżności ciągu $x^{(n)}$, wykorzystując metody analizy funkcjonalnej. W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ wprowadzamy normy

$$||x||_n = \sqrt[n]{|x_1|^n + |x_2|^n + |x_3|^n},$$
$$||x||_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|).$$

Wiadomo, że $||x||_n \to ||x||_\infty$ (patrz [2]). Punkty $x^{(n)}$ realizują minimum $||\cdot||_n$. Zatem punkt $x^{(\infty)}$ realizuje minimum $||\cdot||_\infty$, czyli

$$\min(\max(|x_1|, |x_2|, |x_3|)),$$

Stąd już łatwo otrzymać, że $|x_1^{(\infty)}| = |x_2^{(\infty)}| = |x_3^{(\infty)}|$.

Literatura

[1] V.G. Karmanov, *Matematičeskoje programmirovanie*, Nauka, Moskwa, 1986 (po rosyjsku).
[2] L.A. Lusternik, W.I. Sobolew, *Elementy analizy funkcjonalnej*, PWN, 1959.
[3] M. Szurek, *Opowieści geometryczne*, PWN, Warszawa, 1995,
[4] S.J. Zetel, *Geometria trójkąta*, PZWS, 1964.

Zadania

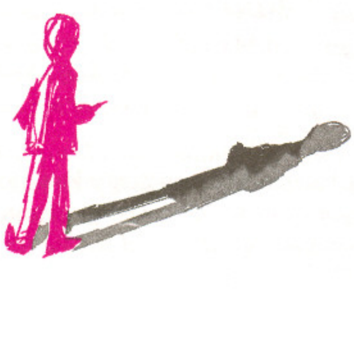
Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 934. Średnice AB i CD okręgu o promieniu R przecinają się pod kątem α. Punkt M leży na okręgu, a punkty P i Q są rzutami prostopadłymi punktu M na średnice AB i CD. Udowodnić, że długość odcinka PQ nie zależy od wyboru punktu M. Znaleźć długość PQ.
Rozwiązanie na str. 11

M 935. Na bokach AB, BC, CD, DA prostokąta $ABCD$ wybrano punkty K, L, M, N odpowiednio, różne od wierzchołków prostokąta. Wiadomo, że $KL \parallel MN$ i $KM \perp LN$. Dowieść, że punkt S przecięcia odcinków KM i LN leży na przekątnej BD prostokąta.
Rozwiązanie na str. 11

M 936. Punkt D jest środkiem okręgu opisanego na takim trójkącie ostrokątnym ABC, że okrąg przechodzący przez punkty A, B, D przecina odcinki AC i BC w punktach M i N (oprócz A i B). Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach ABD i MNC mają równe promienie.
Rozwiązanie na str. 12

Redaguje Ewa CZUCHRY



F 535. Na wysokości 5 m jest zawieszona żarówka o natężeniu 200 cd. Największe oświetlenie jest pod żarówką i zmniejsza się równomiernie we wszystkich kierunkach. Ile wynosi pole obszaru, wewnątrz którego oświetlenie jest nie mniejsze od 1 lx?
Rozwiązanie na str. 16

F 536. Dwa płaskie zwierciadła tworzą kąt dwuścienny α. Na zwierciadła te pada promień w płaszczyźnie do nich prostopadłej i odbija się od obu. Wyznaczyć kąt, o jaki odchyli się promień po odbiciu.
Rozwiązanie na str. 16