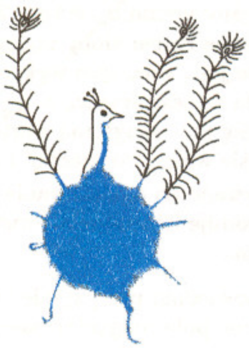
Macierze n-wymiarowe

Mirosław ŻWIRYN

Jest to skrót jednej z dwóch prac nagrodzonych srebrnym medalem na Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 2000 r.

Spróbujemy uogólnić pojęcie macierzy na dowolny wymiar będący liczbą naturalną. Cóż to właściwie znaczy? Otóż jedna z definicji podaje, że macierz o n wierszach i k kolumnach to funkcja dwóch zmiennych, której dziedziną jest iloczyn kartezjański zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ oraz zbioru $\{1, 2, \ldots, k\}$, natomiast wartościami są liczby zespolone. Jeżeli teraz na tak zdefiniowaną macierz spojrzymy z geometrycznego punktu widzenia, to wyda nam się ona obiektem dwuwymiarowym. Powstaje myśl, by rozważać macierze trój-, cztero- i więcej wymiarowe. Przykładowo, macierz trójwymiarowa to zbiór elementów indeksowanych trzema liczbami. Do jednoznacznego określenia elementu takiej macierzy potrzeba trzech liczb: numeru wiersza, numeru kolumny i dodatkowo numeru trzeciej zmiennej, którą nazwałem głębią. Dla macierzy więcej wymiarowych z oczywistych względów wiersz został zastąpiony 1-ścianą, kolumna to 2-ściana itd. Macierz ma tyle wymiarów, ile ma różnych i-ścian. Zapiszmy teraz bardziej formalną definicję macierzy n-wymiarowej.



Definicja. Przyporządkujmy każdej n-tce uporządkowanej $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ liczb naturalnych, gdzie

$$1 < i_1 < k_1, \quad 1 < i_2 < k_2, \quad \ldots, \quad 1 < i_n < k_n,$$

dowolną liczbę zespoloną. Otrzymujemy funkcję (n zmiennych) na zbiorze uporządkowanych n-tek zwaną macierzą n-wymiarową.

Dla tak zdefiniowanej macierzy n-wymiarowej można wprowadzić szereg pojęć, w prosty sposób uogólniając standardowe definicje dla zwykłych macierzy. W ten sposób można wprowadzić pojęcie równości macierzy, określić ich dodawanie, odejmowanie czy mnożenie przez skalar. Podajmy dla przykładu definicję transpozycji macierzy.

Definicja. Niech dana będzie macierz $\mathbf{A} = [a_{i_1, i_2, \ldots, i_n}]$, gdzie $i_1 = 1, 2, \ldots, k$, $i_2 = 1, 2, \ldots, k$, $\ldots$, $i_n = 1, 2, \ldots, k$. Macierzą transponowaną macierzy $\mathbf{A}$ nazywamy macierz $\mathbf{A}^T = [b_{i_1, i_2, \ldots, i_n}]$, gdzie $b_{i_1 i_2 \ldots i_n} = a_{i_n, i_{n-1} \ldots i_1}$.

Znacznie trudniejsze okazuje się zdefiniowanie analogii wyznacznika dla macierzy n-wymiarowych. W dalszym ciągu zajmować się będziemy tylko takimi macierzami $\mathbf{A}_k^n$, dla których $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = k$, czyli odpowiednikami macierzy kwadratowych. Pominiemy też przypadek $n = k = 1$. Zacznijmy od następującej definicji.

Definicja. Wyznacznikiem pierwotnym stopnia n macierzy $\mathbf{A}_k^n$, $n \neq 0$, nazywamy wyrażenie

$$\det \mathbf{A}_k^n = \sum_{\alpha_i,\ i=1,2,\ldots,n} (-1)^{\sum_{i=1}^{n} J(\alpha_i)} a_{\alpha_{1_1}\alpha_{2_1}\ldots\alpha_{n_1}} a_{\alpha_{1_2}\alpha_{2_2}\ldots\alpha_{n_2}} \ldots a_{\alpha_{1_k}\alpha_{2_k}\ldots\alpha_{n_k}},$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie permutacje:

$$\alpha_{1_1}\alpha_{1_2}\ldots\alpha_{1_k}$$
$$\alpha_{2_1}\alpha_{2_2}\ldots\alpha_{2_k}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{n_1}\alpha_{n_2}\ldots\alpha_{n_k}$$

liczb $1, 2, \ldots, k$, natomiast $J(\alpha_i)$ jest ilością inwersji w i-tej permutacji, przy czym $i = 1, 2, \ldots, n$.

Zachodzi twierdzenie:

Twierdzenie

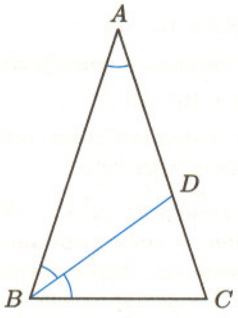
(*) Jeśli n jest nieparzyste, to $\det \mathbf{A}_k^n = 0$,

(**) Jeśli natomiast n jest parzyste, to istnieją takie macierze, że $\det \mathbf{A}_k^n \neq 0$.

Powyższe twierdzenie stanowi podstawę do dobrego zdefiniowania wyznacznika dla macierzy wymiaru parzystego.

Pozostaje natomiast nierozwiązana kwestia określenia mnożenia macierzy n-wymiarowych. Gdyby to się udało, można byłoby uogólnić wiele ważnych twierdzeń z teorii zwykłych macierzy.

Rozwiązanie zadania M 949.
Rozważmy trójkąt równoramienny ABC z kątami $\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$.



Niech BD będzie dwusieczną kąta B. Wtedy $BC = BD = AD$. Załóżmy, że $BC = 1$. Z trójkątów ABD i BCD mamy $AB = 2\cos\frac{\pi}{5}$, $CD = 2\cos\frac{2\pi}{5}$. Równość $AD = AB - CD$ daje tezę.

Na koniec pozwolę sobie na pewną spekulację. Badając macierze n-wymiarowe, zauważamy ich odmienne zachowanie dla wymiarów parzystych i nieparzystych (np. w zachowaniu wyznacznika pierwotnego). Jeśli pójdziemy dalej i macierze uważać będziemy za obiekty geometryczne, to nie jest wykluczone, że różnice w zachowaniu się wyznacznika będą mogły być wyjaśnione na podstawie własności samej przestrzeni. Pewne własności metryczne są przecież zależne od parzystości bądź nieparzystości wymiaru: tak jest np. ze wzorem na objętość kuli n-wymiarowej. Między innymi z tego względu uważam, że traktowanie macierzy jako obiektów geometrycznych może być istotne.

Zbiory i „zbiory"

Jeśli zbiór to kolekcja, zgromadzenie pewnych obiektów (na przykład obdarzonych określoną własnością) w jedną całość, to rozpatrzmy kolekcję, gromadzącą wszystkie zbiory X o następującej, prostej do sformułowania własności: $X \notin X$. Jeśli ta kolekcja jest zbiorem Z, to sprawdzenie, czy Z ma rzeczoną własność, prowadzi do sprzeczności. Istotnie, gdy $Z \notin Z$, to Z spełnia warunek przynależności do Z, a więc $Z \in Z$. Jeśli zaś $Z \in Z$, to Z nie ma własności definiującej Z, zatem $Z \notin Z$. Tak więc Z jest kolekcją, która nie może być i nie jest zbiorem. Aby pozbyć się takich paradoksów, zaksjomatyzowano pojęcie zbioru.

Georg Cantor, matematyk, którego prace spowodowały narodziny teorii zbiorów (zwanej w Polsce teorią mnogości), udowodnił, że żaden zbiór nie ma dość elementów, by można było w sposób różnowartościowy każdemu podzbiorowi przypisać jeden element zbioru – na pewno nie wystarczy dla wszystkich podzbiorów. Owo twierdzenie Cantora ma ciekawe konsekwencje, wynika z niego w szczególności, że nie istnieje zbiór, którego elementami byłyby wszystkie zbiory. Inaczej mówiąc, nie istnieje żaden wielki nadzbiór, gromadzący w sobie *wszystkie* zbiory. Gdyby W był takim zbiorem, to należałby do niego każdy podzbiór zbioru W, bo każdy taki podzbiór jest przecież zbiorem, ale wtedy moglibyśmy każdemu podzbiorowi A zbioru W przypisać element W, mianowicie sam zbiór A – wbrew twierdzeniu Cantora. A więc kolekcja wszystkich zbiorów nie jest zbiorem. Co więcej, nie jest zbiorem nawet kolekcja wszystkich zbiorów jednoelementowych. Moglibyśmy przecież dla każdego zbioru A utworzyć jednoelementowy zbiór $\{A\}$ (którego jedynym elementem jest zbiór A) i potem – gdyby wszystkie zbiory jednoelementowe należały do jednego, wspólnego zbioru – wziąć sumę takich jednoelementowców (a na to teoria mnogości pozwala), a wtedy do takiej sumy należałby każdy zbiór – co jest przecież niemożliwe, jak przed chwilą widzieliśmy. Tak więc zbiorów jednoelementowych jest „za dużo", by można je było zebrać w zbiór. Ale to już nie jest paradoks: to twierdzenie teorii mnogości.

Jeśli $\mathcal{A}$ jest zbiorem, którego elementami są zbiory (taki zbiór nazywa się często *rodziną zbiorów*), to sumą rodziny $\mathcal{A}$ jest zbiór złożony z wszystkich tych i tylko tych elementów, które należą do choćby jednego zbioru z rodziny $\mathcal{A}$.

Takie zbiory-niezbiory (powiedzmy, „zbiory") spotyka się na tyle często, że pewnie warto coś z nimi zrobić, więc zrobiono. Wybrano rozwiązanie proste: zamiast pojęcia pierwotnego (czyli niedefiniowanego w teorii) „zbiór" wprowadzono pojęcie „klasa", definiując zbiór jako taką klasę, która jest elementem innej klasy. W ten sposób „zbiór" W stał się obiektem legalnym, podobnie jak „zbiór", do którego należą wszystkie zbiory. Po prostu owe „zbiory" są klasami, ale nie zbiorami (i nie mogą być elementami innej klasy).

Filateliści badają znaczki pocztowe, klasyfikują je i opisują, przeciętny śmiertelnik używa ich do wysyłania listów. Przeciętny śmiertelnik-matematyk używa zbiorów i „zbiorów", nie zastanawiając się nad ich klasyfikacją. I słusznie. Zamiast dzielić kolekcje na klasy i zbiory, można się umówić, że mówimy tylko o zbiorach, będących podzbiorami pewnego „wszechzbioru" (nazywanego niekiedy zbiorem uniwersalnym). Wtedy wystarczy zwykła, „bezklasowa" teoria mnogości. A filateliści mogą rozwijać dalej swoje zainteresowania...

Wiktor BARTOL

Rozwiązanie zadania F 545.
Różnica ciśnień w obu rurkach jest równa ciśnieniu hydrodynamicznemu przepływającej cieczy, czyli

$$\frac{\rho v^2}{2} = \rho g h.$$

Stąd

$$v = \sqrt{2gh} \approx \sqrt{2}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 1{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$