Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2001.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 312 (WT=2,13) i 313 (WT=4,00) z numeru 2/2001

Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	38,32
Aleksander Surma	– Myszków	37,60
Tomasz Rudny	– Warszawa	28,28
Tomasz Wietecha	– Tarnów	22,29
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	22,19

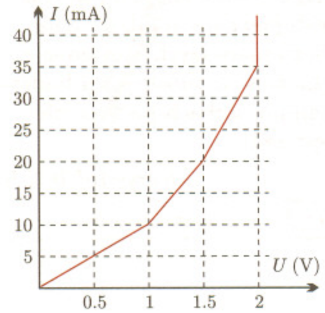
Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2001

Przypominamy treść zadań:

314. Kula naładowana powierzchniowo stałą gęstością ładunku składa się z dwóch zetkniętych półkul o tej samej masie. W wyniku wzajemnego odpychania półkule zaczęły się poruszać i oddaliły się na bardzo dużą odległość (ruch zachodzi bez oporów). W którym przypadku prędkość uzyskana przez półkule będzie większa: gdy są przewodzące, czy gdy są nieprzewodzące?

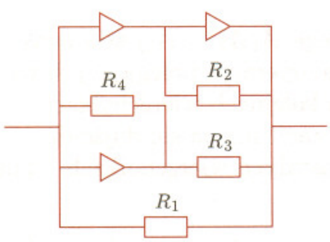
315. Mamy do dyspozycji dowolne oporniki oraz dowolną liczbę idealnych diod o napięciu progowym 1 V (tzn. nie przewodzących prądu przy niższym napięciu, a przewodzących dowolnie duży prąd przy napięciu minimalnie większym). Zaprojektować jak najprostszy obwód o dwóch wyjściach, którego charakterystyka prądowo-napięciowa jest dana na przedstawionym obok wykresie.

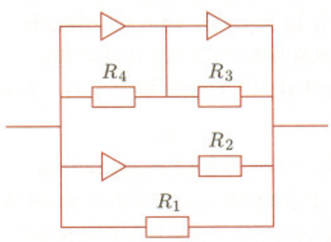


Poza konkursem: Czy istniałoby rozwiązanie, gdyby punkt łamanej o współrzędnych (2; 35) przesunąć w górę do (2; 50)? (Autorowi nie udało się ani znaleźć tego rozwiązania, ani udowodnić, że nie istnieje.)

314. Na przewodzących półkulach ładunek rozkłada się tak, aby energia potencjalna (energia pola elektrostatycznego) była najniższa – dlatego energia kinetyczna półkul będzie w tym przypadku wyższa, czyli rozbiegną się z większą prędkością. A oto inny argument: podczas oddalania się od siebie półkul przewodzących część ładunku przejdzie na podstawy półkul i będą się one odpychać nieco silniej niż wtedy, gdy pozostanie on rozłożony tylko na zewnętrznej powierzchni.

315. Jak się wydaje, najprostszymi obwodami zgodnymi z podaną charakterystyką są dwa przedstawione obok.





Gdy $U < 1$ V, prąd płynie tylko przez 2 gałęzie – przez R_1 oraz przez R_3 i R_4. Ponieważ według charakterystyki opór jest wtedy równy 100 Ω, więc pomijając jednostki, możemy napisać

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3 + R_4} = \frac{1}{100}.$$

W przedziale 1 V $< U <$ 1,5 V prąd zaczyna płynąć przez jedną z diod i opornik R_2, a jego natężenie jest dane wzorem

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_3 + R_4} + \frac{U-1}{R_2},$$

czyli

$$\Delta I = \Delta U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3 + R_4} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Z wykresu odczytujemy $\Delta U = 0{,}5$ V, $\Delta I = 10$ mA, a porównując z poprzednim równaniem znajdujemy $R_2 = 100$ Ω. Aby kolejne załamanie wykresu następowało przy napięciu 1,5 V, opory R_3 i R_4 muszą pozostawać w stosunku 1:2 (na dolnym schemacie także odwrotny stosunek jest dopuszczalny) – wtedy w przedziale 1,5 V $< U <$ 2 V prąd płynie także przez diodę równoległą do opornika R_4, a natężenie prądu całkowitego wynosi

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U-1}{R_3} + \frac{U-1}{R_2},$$

stąd

$$\Delta I = \Delta U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2}\right).$$

W tym przedziale mamy $\Delta U = 0{,}5$ V, $\Delta I = 15$ mA, a dalej wyznaczamy $R_1 = 200$ Ω, $R_3 = 66{,}7$ Ω i $R_4 = 133{,}3$ Ω. Gdy napięcie przekracza 2 V, prąd płynie przez dwie połączone szeregowo diody bez oporu.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 409 (WT=2,13) i 410 (WT=1,19) z numeru 11/2000

Konrad Patkowski	– Gdańsk	44,75
Bartłomiej Marczak	– Warszawa	44,27
Paweł Kubit	– Kraków	42,22
Piotr Kumor	– Olsztyn	39,50
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	38,19
Janusz Olszewski	– Suwałki	36,60

Pan Konrad Patkowski po kilku miesiącach milczenia znów się włączył do gry i zakończył swoją drugą rundę. A pana Marczaka witamy w **Klubie 44 M** z kolejnym numerem członkowskim 94.

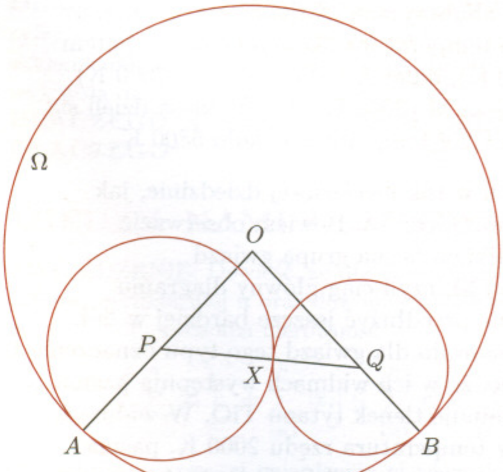
Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2001

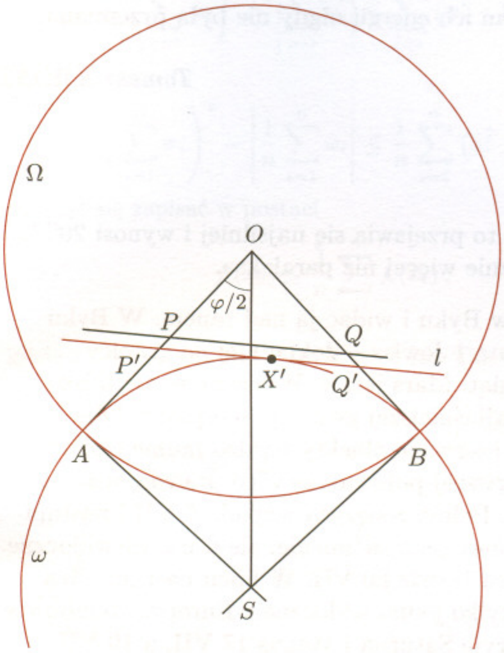
Przypominamy treść zadań:

417. Niech n będzie ustaloną dodatnią liczbą całkowitą. Znaleźć największą możliwą wartość sumy $\sum_{i=1}^{2n} |\pi(i) - i|$ dla permutacji π zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$. Ile jest permutacji wyznaczających tę maksymalną wartość?

418. Dany jest okrąg Ω o środku O i promieniu r oraz dwa ustalone różne punkty A i B na tym okręgu, w odległości kątowej $|\angle AOB| = \varphi$. Rozważamy pary okręgów stycznych wewnętrznie do okręgu Ω w punktach A i B oraz wzajemnie stycznych zewnętrznie. Punkty ich styczności zewnętrznej tworzą łuk krzywej. Obliczyć długość tego łuku.



Rys. 1



Rys. 2

417. Niech $A = \{1, \ldots, n\}$, $B = \{n+1, \ldots, 2n\}$. Weźmy dowolną permutację π zbioru $A \cup B$, dla której wartość sumy $F(\pi) = \sum_{i=1}^{2n} |\pi(i) - i|$ jest możliwie największa (permutację *optymalną*).

Wykażemy, że π odwzorowuje zbiór A na zbiór B, a zbiór B na zbiór A. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wówczas istnieją elementy $a \in A$, $b \in B$ takie, że $\pi(a) \in A$, $\pi(b) \in B$. Określamy permutację π' zbioru $A \cup B$ wzorami

$$\pi'(a) = \pi(b), \qquad \pi'(b) = \pi(a), \qquad \pi'(i) = \pi(i) \quad \text{dla } i \neq a, b.$$

Obliczamy różnicę

$$\begin{aligned} F(\pi') - F(\pi) &= |\pi'(a) - a| + |\pi'(b) - b| - |\pi(a) - a| - |\pi(b) - b| = \\ &= \pi(b) - a + b - \pi(a) - |\pi(a) - a| - |\pi(b) - b| = \beta - \alpha, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \beta &= \pi(b) + b - |\pi(b) - b| = 2 \min\{b, \pi(b)\} \geq 2(n+1), \\ \alpha &= \pi(a) + a + |\pi(a) - a| = 2 \max\{a, \pi(a)\} \leq 2n. \end{aligned}$$

Dostajemy nierówność $F(\pi') - F(\pi) = \beta - \alpha > 0$, wbrew optymalności π. Zatem istotnie każda permutacja optymalna odwzorowuje A na B, a B na A.

Niech teraz π będzie dowolną permutacją spełniającą ten ostatni warunek. Dla każdej takiej permutacji otrzymujemy jednakową wartość $F(\pi)$:

$$\begin{aligned} F(\pi) &= \sum_{i=1}^{n} (\pi(i) - i) + \sum_{i=n+1}^{2n} (i - \pi(i)) = \sum_{j=n+1}^{2n} j - \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=n+1}^{2n} i - \sum_{j=1}^{n} j = \\ &= 2((n+1) + (n+2) + \ldots + 2n) \; - \; 2(1 + 2 + \ldots + n) = \\ &= n(3n+1) - n(n+1) = 2n^2. \end{aligned}$$

Jest to więc wartość maksymalna. Stąd wynika, że permutacjami optymalnymi zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ są dokładnie te, które odwzorowują zbiór A na B, a B na A. Każdą z bijekcji $A \to B$, $B \to A$ można wybrać niezależnie od pozostałej na $n!$ sposobów. Zatem liczba permutacji optymalnych jest równa $(n!)^2$.

418. Weźmy pod uwagę dowolną parę okręgów, o jakich mowa w zadaniu. Oznaczmy ich środki przez P i Q, a punkt ich styczności zewnętrznej przez X. Zauważmy, że $|PQ| = |PX| + |QX| = |AP| + |BQ|$ (rys. 1).

Niech ω będzie okręgiem wpisanym w kąt AOB (rys. 2), stycznym do jego ramion w punktach A i B. Prowadzimy prostą $\ell \| PQ$, styczną do tego okręgu w punkcie X' oraz przecinającą odcinki OA i OB odpowiednio w punktach P' i Q'. Gdyby prosta PQ była rozłączna z okręgiem ω, mielibyśmy zależności

$$|PQ| < |P'Q'| = |P'X'| + |Q'X'| = |AP'| + |BQ'| < |AP| + |BQ|;$$

a gdyby prosta PQ przecinała okrąg ω w dwóch punktach, zachodziłyby nierówności przeciwne. Otrzymana w obu przypadkach sprzeczność z uzyskaną wcześniej równością $|PQ| = |AP| + |BQ|$ dowodzi, że prosta PQ jest styczna do okręgu ω; tak więc $X = X'$ jest punktem tego okręgu.

Okrąg ω jest stały (nie zależy od wyboru pary małych okręgów). Możliwe położenia punktu X znajdują się na mniejszym łuku AB tego okręgu i wypełniają cały ten łuk; wystarczy bowiem w dowolnie wybranym jego punkcie X poprowadzić styczną do ω, aby w punktach jej przecięcia z odcinkami OA i OB otrzymać środki małych okręgów, stycznych zewnętrznie w punkcie X.

Oznaczając środek okręgu ω przez S, obliczamy długość d jego łuku AB:

$$d = |SA| \cdot |\angle ASB| = r \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cdot (\pi - \varphi).$$