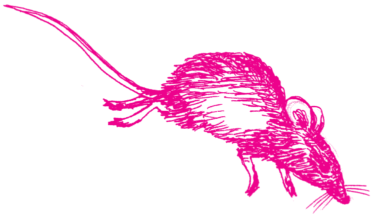
Hiperbola na wojnie

Leszek SIDZ



Hiperbola może być definiowana w różny sposób. Dla nas będzie ona zbiorem tych punktów na płaszczyźnie, których wartość bezwzględna różnicy odległości od dwóch danych punktów jest stała. Ustalmy zatem dwa punkty F_1 i F_2, zwane dalej ogniskami hiperboli, oraz taką liczbę a, że $2a < |F_1F_2|$. Punkt X należy do hiperboli o ogniskach F_1, F_2 i półosi a wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\big||F_1X| - |F_2X|\big| = 2a.$$

Jeżeli wprowadzimy na płaszczyźnie układ współrzędnych i wybierzemy punkty $F_1 = (-c, 0)$ i $F_2 = (c, 0), c > 0$, to możemy wyprowadzić równanie hiperboli:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

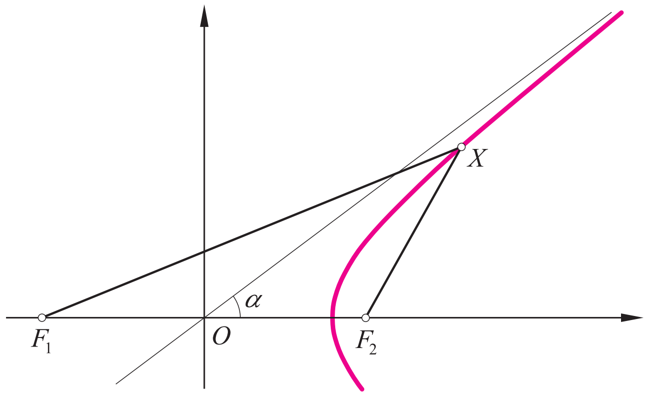
gdzie $c^2 = b^2 + a^2$. Figura ta składa się z dwóch gałęzi, mających asymptoty o równaniach $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$.

Asymptota hiperboli to prosta, która się do tej krzywej zbliża dowolnie blisko, ale jej nie przecina.

Te podstawowe własności hiperboli wystarczą do przedstawienia pewnego jej zastosowania w sztuce wojennej. Wyobraźmy sobie, że stanowisko naszego oddziału ostrzeliwane jest przez niewidoczne, np. położone za wzgórzem w punkcie X, wrogie działo. Musimy określić położenie działa, aby ostrzelać je ogniem własnej baterii. W tym celu po obu stronach punktu O, w którym znajdują się nasze działa, wybieramy symetrycznie względem O położone punkty F_1 i F_2, $|F_1F_2| = 2c$. W punktach tych notujemy moment słyszanego wystrzału wrogiego działa. Powiedzmy, że w F_1 usłyszano odgłos w chwili t_1, a w F_2 w chwili t_2. Jeżeli $t_1 = t_2$, to jasne, że należy strzelać w kierunku prostopadłym do odcinka OF_1. Jeżeli chwile te są różne, to $|t_1 - t_2| = \frac{2a}{w}$, gdzie w to prędkość dźwięku w powietrzu, a $2a = \big||F_1X| - |F_2X|\big|$. Widzimy zatem, że wrogie działo znajduje się w punkcie X, leżącym na hiperboli o ogniskach F_1, F_2 i półosi $a = \frac{w|t_1-t_2|}{2}$, a dokładniej na tej gałęzi, która leży po tej samej stronie co punkt, w którym wcześniej usłyszano wystrzał.

Bateria to kilku ludzi z paroma armatami.

Ponieważ punkt X leży zazwyczaj w dużej odległości, możemy nakierować nasze działo w kierunku asymptoty, czyli pod kątem α do prostej F_1F_2, takim, że $\cos\alpha = \frac{a}{c}$.



Ważne jest jeszcze określenie odległości, na jaką należy strzelać. Jeżeli znamy parametry wrogiego działa (prędkość pocisku przy wylocie), to mierząc czas między usłyszeniem wystrzału a momentem upadku pocisku, możemy sobie i z tym poradzić (nawet bez hiperboli).

Rozwiązanie zadania M 984.

Oznaczmy przez k liczbę naturalną spełniającą warunek $2^k \le n < 2^{k+1}$, przez M zaś iloczyn wszystkich liczb nieparzystych nie większych niż n. Zauważmy, że dla każdej liczby $m \neq 2^k$ nie większej niż n liczba $a_m = \frac{1}{m} \cdot 2^{k-1}M$ jest całkowita. Wynika z tego, że liczba

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \cdot 2^{k-1}M = \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^k-1} + a_{2^k+1} + \ldots + a_n\right) + \frac{M}{2}$$

nie jest całkowita (liczba w nawiasie jest całkowita, a $\frac{M}{2}$ nie), z czego wynika, że również $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ nie jest całkowita.