Średnie i związane z nimi ciągi

Janusz MATKOWSKI

Niech $\mathbb{R}$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych i niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem. Funkcję $M : I \times I \to \mathbb{R}$ nazywamy *średnią* (dwóch zmiennych), jeśli

$$\min(x, y) \leq M(x, y) \leq \max(x, y), \qquad x, y \in I.$$

Jeśli dla wszystkich $x, y \in I$, $x \neq y$, te nierówności są ostre, średnia nazywana jest *ścisłą*; jeśli $M(x, y) = M(y, x)$, *symetryczną*. Średnia M ma następujące własności:

$M(x, x) = x$ dla każdego $x \in I$;
$M(J \times J) = J$ dla każdego przedziału $J \subset I$, w szczególności, $M(I \times I) = I$.

Dla zbiorów X i Y symbol $M(X \times Y)$ oznacza $\{M(x, y) : x \in X i y \in Y\}$.

Definicja średniej i te własności przenoszą się na przypadek dowolnej skończonej liczby zmiennych.

Najbardziej znane średnie: *arytmetyczna* $A : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *geometryczna* $G : (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty)$ i *harmoniczna* $H : (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty)$,

$$A(x, y) := \frac{x + y}{2}, \qquad G(x, y) := \sqrt{xy}, \qquad H(x, y) := \frac{2xy}{x + y},$$

są ścisłe i symetryczne.

Pochodzenie nazwy średniej A nie wymaga komentarzy. Nazwa średniej G ma swe źródło w znanej z geometrii równości $h = G(x, y)$, gdzie h jest długością wysokości w trójkącie prostokątnym, a x i y są długościami odcinków, na które dzieli przeciwprostokątną spodek wysokości. Każda z tych średnich ma interpretację geometryczną, przy czym najciekawszą z nich ma średnia harmoniczna. W trapezie długość odcinka równoległego do podstaw, łączącego boki trapezu i „przechodzącego przez" punkt przecięcia przekątnych, jest średnią harmoniczną długości podstaw. Nazwa średniej harmonicznej wywodzi się z proporcji

$$(*) \qquad \frac{x}{A(x, y)} = \frac{H(x, y)}{y}, \qquad x, y > 0,$$

i sięga czasów Euklidesa i Pitagorasa. Interesujące są związki średniej H z „harmonią" w sferze dźwięków.

A, G i H należą do szerokiej rodziny średnich o prostej konstrukcji. Zauważmy, że *jeśli $f : I \to \mathbb{R}$ jest ciągła i ściśle monotoniczna, to funkcja $M_f : I \times I \to \mathbb{R}$,*

$$M_f(x, y) := f^{-1}\left(\frac{f(x) + f(y)}{2}\right) = f^{-1}\left(A(f(x), f(y))\right)$$

jest średnią ścisłą i symetryczną (f^{-1}oznacza funkcję odwrotną do f). Średnią tę nazywa się *quasi-arytmetyczną,* a funkcję f jej *generatorem.* Dowodzi się, że

$$M_f = M_g \textit{ wtedy i tylko wtedy, gdy } g = af + b \textit{ dla pewnych } a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Łatwo sprawdzić, że $A = M_{\mathrm{id}}$, $G = M_{\log}$, $H = M_h$, gdzie id jest funkcją identycznościową na $\mathbb{R}$ oraz $h(x) := \frac{1}{x}$ dla $x > 0$.

W trójelementowej rodzinie $\{A, G, H\}$ średnia G odgrywa specjalną rolę (pomijamy tutaj rolę specjalności górniczej na AGH). Średnia geometryczna jest jedyną ciągłą średnią niezmienniczą ze względu na odwzorowanie $(A, H) : (0, \infty)^2 \to (0, \infty)^2$, takie że $(A, H)(x, y) = (A(x, y), H(x, y))$, tzn. $G \circ (A, H) = G$. Ten fakt, równoważny wspomnianej już proporcji $(*)$ pozwala wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} (A, H)^n(x, y) = (G(x, y), G(x, y)), \qquad x, y > 0,$$

gdzie $(A, H)^n$ oznacza n-tą iterację odwzorowania (A, H).

Rozwiązanie zadania F 568.
Po dłuższym czasie palenia się żarówki temperatura T jej włókna ustala się i moc przepływającego przez nią prądu I^2R jest równa mocy promieniowania cieplnego, tzn. iloczynowi natężenia promieniowania E i powierzchni włókna S:

$$P = I^2R = ES.$$

Opór R włókna żarówki jest równy $R = 4\rho l/\pi d^2$, gdzie l to długość włókna, a $\pi d^2/4$ jego przekrój. Stąd

$$P = \frac{4\rho l I^2}{\pi d^2}.$$

Natężenie promieniowania E wynosi $E = \sigma T^4$, gdzie $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\mathrm{W}/(\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}^4)$, a powierzchnia włókna $s = \pi dl$. Zatem

$$P = \sigma T^4 \pi dl.$$

Porównując powyższe dwa wzory na P, otrzymujemy

$$T = \sqrt[4]{\frac{4\rho I^2}{\sigma \pi^2 d^3}} \approx 2500\ \mathrm{K}.$$

H. Haruki, Th. M. Rassias, *A new analogue of Gauss' functional equation*, Internat. J. Math. Sci. **18**(1995), 749–756.

W roku 1995, H. Haruki i Th. M. Rassias postawili następujący

Problem. Niech $F : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą spełniającą równanie funkcyjne

$$F\left(A(x,y), H(x,y)\right) = F(x,y), \qquad x, y > 0.$$

Czy istnieje taka funkcja ciągła $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, że $F(x,y) = g(xy)$, $x, y > 0$?

Twierdząca odpowiedź wynika z ostatniej obserwacji. Aby to wykazać, zauważmy, że jeśli funkcja F spełnia powyższe równanie funkcyjne, to dla każdej liczby naturalnej n

$$F\left((A,H)^n(x,y)\right) = F(x,y), \qquad x, y > 0.$$

Stąd i z ciągłości F, gdy $n \to \infty$, otrzymujemy

$$F\left((G,G)(x,y)\right) = F(x,y), \qquad x, y > 0,$$

czyli $F(x,y) = F(\sqrt{xy}, \sqrt{xy}) = g(xy)$, gdzie $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ jest określona wzorem $g(x) := F(\sqrt{x}, \sqrt{x})$.

Ze średnimi A, G, H łączą się takie określenia jak ciąg arytmetyczny, ciąg geometryczny i ciąg harmoniczny. Ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ liczb rzeczywistych nazywamy arytmetycznym, jeśli $x_{n+1} = A(x_n, x_{n+2})$, $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, \ldots\}$;

ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ liczb rzeczywistych dodatnich (!) nazywamy:

geometrycznym, jeśli $\quad x_{n+1} = G(x_n, x_{n+2}), \quad n \in \mathbb{N}_0$;

harmonicznym, jeśli $\quad x_{n+1} = H(x_n, x_{n+2}), \quad n \in \mathbb{N}_0$.

Ogólniej, niech $M : I \times I \to I$ będzie średnią. Ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ nazwiemy M-*ciągiem*, jeżeli $x_n \in I$ dla $n \in \mathbb{N}_0$ oraz

$$x_{n+1} = M(x_n, x_{n+2}), \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Jeśli $M = M_f$, to wyznaczenie n-tego wyrazu M-ciągu jest zadaniem łatwym. Korzystając bowiem z definicji M_f-ciągu, mamy

$$f(x_{n+2}) - f(x_{n+1}) = f(x_{n+1}) - f(x_n), \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

a więc, dla pewnej stałej $a \in \mathbb{R}$,

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = a, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

Dodając stronami te równości dla $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, otrzymujemy

$$f(x_n) - f(x_0) = na, \ n \in \mathbb{N}_0, \qquad \text{a stąd} \qquad x_n = f^{-1}\left(f(x_0) + na\right), \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Łatwo sprawdzamy, że ten ciąg jest M_f-ciągiem.

Stosując otrzymany wzór kolejno dla $f = \mathrm{id}$, $f = \log$ oraz $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, stwierdzamy, że:

ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ jest arytmetyczny wtedy i tylko wtedy gdy, dla pewnego $a \in \mathbb{R}$

$$x_n = x_0 + na, \quad n \in \mathbb{N}_0;$$

geometryczny wtedy i tylko wtedy, gdy $x_0 > 0$ i dla pewnego $a \in \mathbb{R}$

$$x_n = x_0 q^n \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \text{gdzie } q := e^a;$$

harmoniczny wtedy i tylko wtedy, gdy $x_0 > 0$ i dla pewnego $a > 0$

$$x_n = \frac{x_0}{1 + a x_0 n}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Biorąc w ostatnim wzorze $x_0 = a = 1$, otrzymujemy klasyczny przykład ciągu harmonicznego $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n=0}^{\infty}$.