Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 V 2003

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z fizyki nr 354, 355

Redaguje Jerzy B. BROJAN

354. Na końcach nieważkiego pręta o długości $2l = 2$ m zamocowane są dwa małe ciała, każde o masie m. Ile wynosi okres małych wahań tego pręta wokół pozycji pionowej, jeśli punkt zawieszenia pokrywa się ze środkiem pręta? Rozważyć dwa przypadki:
a) pole grawitacyjne jest radialne (skierowane do środka Ziemi), a jego natężenie ma jednakową wartość g w okolicy górnego i dolnego ciała,
b) pole grawitacyjne jest takie, jakby cała masa Ziemi była skupiona w jej środku.

355. Chemik pozostawił w otwartym naczyniu ciekły azot, który powoli parował. Po pewnym czasie analiza wykazała, że w azocie jest domieszka tlenu. W miarę ubywania azotu procent tlenu rósł, aż ostatnia partia cieczy składała się wyłącznie z ciekłego tlenu. Na tej podstawie chemik wywnioskował, że zrealizowane zostało marzenie alchemików – wykryta została transmutacja pierwiastków. Czy to prawda? Wyjaśnić, co się stało.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
342 ($WT = 3{,}00$) i **343** ($WT = 2{,}00$)
z numeru 9/2002

Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	43,22
Aleksander Surma	– Myszków	42,81
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	28,89
Tomasz Wietecha	– Tarnów	22,25
Leszek Grzanka	– Chechło	12,38

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/2002

Przypominamy treść zadań:

346. Pozioma membrana drga harmonicznie wzdłuż osi pionowej z częstotliwością $f = 100$ Hz. Ile wynosi amplituda tych drgań, jeśli leżące na membranie ziarnka piasku podskakują na wysokość $h = 2$ cm względem środkowego położenia membrany?

347. Jacek i Placek dostali w schronisku po kubku bardzo gorącej herbaty.
– Parzy! – zawołał Jacek.
– Nic na to nie mogę poradzić – powiedziała bufetowa – chyba że dam wam po dodatkowym kubku, żebyście sobie rozlali i żeby szybciej wystygło.
– Świetnie! – ucieszył się Jacek, rozlał zawartość swojego kubka po połowie, zaczekał kilka minut i zlał z powrotem. – Wciąż jeszcze za gorąca! – skrzywił się.
Tymczasem Placek również zlał swoją herbatę do jednego kubka i oświadczył:
– Moja wcale nie jest za gorąca.

Czy rzeczywiście mógł lepiej ostudzić swoją herbatę, jeśli jedyną przyczyną był inny jej podział na dwie części? Obaj zlali herbatę do kubków, w których herbata była na początku.

346. Oderwanie się ziarenka piasku od membrany nastąpi w momencie, gdy jego przyspieszenie będzie skierowane w dół i zrówna się z przyspieszeniem ziemskim:
$$a = A\omega^2 \sin(\omega t) = g,$$
gdzie A jest szukaną amplitudą drgań, a $\omega = 2\pi f$. Prędkość ziarenka w tym momencie wynosi $v = A\,\omega\cos(\omega t)$. Dana wysokość h jest sumą wysokości w chwili oderwania się oraz wysokości rzutu pionowego $v^2/2g$, czyli
$$h = A\sin(\omega t) + (A\omega\cos(\omega t))^2/2g.$$
Przekształcając to równanie znajdujemy
$$A = \frac{\sqrt{g(2h\omega^2 - g)}}{\omega^2} \approx 1\,\mathrm{mm}.$$

347. Kubki mają pewną pojemność cieplną, więc w wyniku przelania herbaty do drugiego kubka jej temperatura się obniży. Im więcej herbaty przelejemy, tym wyższa będzie jej temperatura początkowa i tym wyższe będzie tempo odpływu ciepła z drugiego kubka. Co do pierwszego kubka, to jego początkowa temperatura nie zależy od ilości przelanej herbaty. Przyjmijmy, że tempo odpływu ciepła z kubka do otoczenia zależy tylko od jego temperatury, ale nie od ilości zawartego w nim płynu. Przy tym założeniu początkowe tempo odpływu ciepła z obu kubków do otoczenia będzie tym wyższe, im więcej herbaty przelejemy; tym więcej energii pozostawimy też w drugim kubku po przelaniu herbaty z powrotem. Pełna analiza problemu z uwzględnieniem zmian temperatury następujących w miarę upływu czasu jest trudna (trzeba przyjąć jakieś założenia co do zależności tempa odpływu ciepła od temperatur kubka i otoczenia). Analiza numeryczna wskazuje, że na ogół nie opłaca się przelać całej herbaty, ale w każdym wypadku lepiej jest przelać więcej, niż połowę.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 V 2003

Zadania z matematyki nr 457, 458

Redaguje Marcin E. KUCZMA

457. Na płaszczyźnie jest dany zbiór złożony z $2n$ punktów ($n \geqslant 2$), których obie współrzędne są liczbami całkowitymi z przedziału $\langle 1; n\rangle$. Dowieść, że pewne cztery punkty tego zbioru są wierzchołkami równoległoboku.

458. Wyznaczyć najmniejszą liczbę a, taką że nierówność

$$(1-a)\sin x + a\ \mathrm{tg}\, x > x$$

jest spełniona dla wszystkich $x \in (0; \pi/2)$.

Zadanie **458** zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/2002

Przypominamy treść zadań:

449. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają układ równań

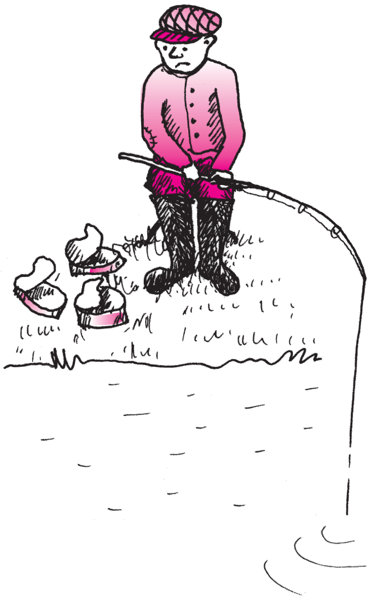
$$y = x^2 - 2, \qquad z = y^2 - 2, \qquad x = z^2 - 2.$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości sumy $x+y+z$.

450. Niech $n, m > 1$ będą ustalonymi liczbami całkowitymi i niech $Z(k)$ oznacza zdanie:

Równanie $x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n = y^n$ ma rozwiązanie
w liczbach całkowitych dodatnich $x_1 < x_2 < \ldots < x_k < y$.

Wykazać, że jeżeli zdania $Z(m)$, $Z(m+1)$, …, $Z(2m-2)$ są prawdziwe, to dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant m$ zdanie $Z(k)$ jest prawdziwe.



449. Trójka (x,y,z) tworzy orbitę iteracyjną funkcji $f(t) = t^2 - 2$; zatem każda z liczb x, y, z jest pierwiastkiem równania $f(f(f(t))) - t = 0$, które po rozłożeniu lewej strony na czynniki przybiera postać

$$(t+1)(t-2)(t^3 - 3t + 1)(t^3 + t^2 - 2t - 1) = 0.$$

Liczby -1 i 2 są punktami stałymi funkcji f; natomiast każdy z wielomianów

$$P(t) = t^3 - 3t + 1 \qquad \text{oraz} \qquad Q(t) = t^3 + t^2 - 2t - 1$$

ma trzy pierwiastki rzeczywiste – co widać na przykład z nierówności $P(0) > 0 > P(1)$ oraz $Q(-1) > 0 > Q(0)$. Z łatwych do sprawdzenia tożsamości

$$P\big(f(t)\big) = P(t)\big(P(t) - 2\big), \quad Q\big(f(t)\big) = Q(t)\big(Q(t) - 2t^2 + 2\big)$$

wynika zaś, że jeśli jedna z liczb x, y, z jest pierwiastkiem któregoś z tych wielomianów, to pozostałe dwie są pozostałymi pierwiastkami tego samego wielomianu.

Wniosek: rozważany układ ma następujące rozwiązania (x,y,z): $(-1,-1,-1)$, $(2,2,2)$ oraz (t_1,t_2,t_3) (trójka pierwiastków wielomianu P) i (t_4,t_5,t_6) (trójka pierwiastków wielomianu Q) – każda z nich w pewnym porządku cyklicznym. Odpowiednie wartości sumy $s = x+y+z$ wynoszą $s=-3$, $s=6$ oraz (zgodnie ze wzorem Viète'a) $s=0$ i $s=-1$.

450. Indukcja: wykażemy, że dla $k \geqslant m$ zdanie $Z(k)$ implikuje zdanie $Z(m+k-1)$. Wobec założonej prawdziwości zdań $Z(k)$ dla $k = m, \ldots, 2m-2$ wyniknie stąd prawdziwość $Z(k)$ dla wszystkich $k \geqslant m$.

Ustalmy więc $k \geqslant m$. Zakładamy słuszność zdań $Z(m)$ oraz $Z(k)$:

$$\exists\ a_1 < \ldots < a_m < b: \quad a_1^n + \ldots + a_m^n = b^n,$$
$$\exists\ c_1 < \ldots < c_k < d: \quad c_1^n + \ldots + c_k^n = d^n.$$

Zatem $b^n c_1^n + \ldots + b^n c_k^n = b^n d^n$, czyli

$$(a_1^n + \ldots + a_m^n)c_1^n + b^n c_2^n + \ldots + b^n c_k^n = b^n d^n,$$
$$(a_1c_1)^n + \ldots + (a_mc_1)^n + (bc_2)^n + \ldots + (bc_k)^n = (bd)^n.$$

Liczby w nawiasach po lewej stronie ostatniej równości tworzą ciąg długości $m+k-1$, ściśle rosnący. To kończy krok indukcyjny $Z(k) \Rightarrow Z(m+k-1)$ i dowodzi tezy zadania.