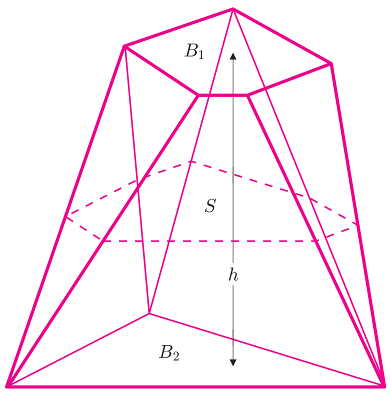
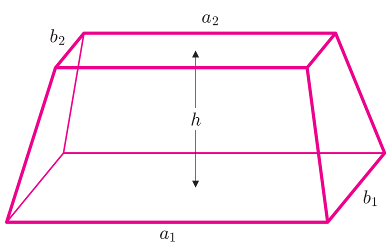
mała delta

Wyprowadź wzór





Jeśli przyjmiemy oznaczenia z rysunku, to objętość pryzmy będzie równa $\frac{1}{6}h \cdot (a_1b_1 + (a_1+a_2)(b_1+b_2) + a_2b_2)$.

Zapytano mnie, czy w przygotowywanej Wielkiej Encyklopedii mają być hasła *pryzma* i *pryzmatoid*. Odpowiedziałem, że nie, bo to nazwy regionalne – choćby po angielsku *prism* oznacza graniastosłup. Potem jednak doszedłem do wniosku, że drugie z tych haseł warto zamieścić, bo w wielu poradnikach i słownikach matematycznych nie ma tego hasła i odpowiedniego wzoru na objętość.

Pryzmatoid to wielościan, którego dwie ściany (zwane podstawami) są równoległe i zawierają wszystkie jego wierzchołki. Wynika z tego, że pozostałe ściany są trójkątami i trapezami. Jeśli pola podstaw będą odpowiednio równe B_1 i B_2, a pole przekroju pryzmatoidu płaszczyzną równoległą do podstaw i jednakowo od nich odległą będzie równe S, to objętość pryzmatoidu będzie równa

$$\frac{1}{6}h \cdot (B_1 + B_2 + 4S), \qquad (*)$$

gdzie h to odległość podstaw (czyli wysokość).

Jak widać, szczególnymi przypadkami pryzmatoidu są graniastosłupy, ostrosłupy i ostrosłupy ścięte, wreszcie pryzmy. Te ostatnie są bowiem wielościanami mającymi dwie podstawy będące prostokątami, ściany boczne zaś trapezami równoramiennymi. Zatem mogą się wśród nich trafiać pewne ścięte ostrosłupy i graniastosłupy.

Oczywiście, wzory na objętości wszystkich wymienionych wielościanów dadzą się uzyskać jako szczególne przypadki wzoru $(*)$ – sprawdzenie tego może sprawić przyjemność. Do Czytelników wyrafinowanych kieruję problem: a jak wyprowadzić wzór na objętość pryzmatoidu? Ciekawe (= niewymęczone) rozwiązania zamieścimy.

Procentowa zagadka

Otrzymaliśmy informację, że boki prostokąta należy powiększyć o 20% i o 25%.

Informacja nie zawierała jednak instrukcji, jak to zrobić. Można ją bowiem (dla prostokąta o bokach długości a i b, gdy $a > b$) odczytać na sześć sposobów.

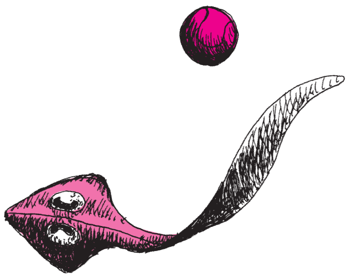
1. powiększamy bok a o 20%, a bok b o 25%;
2. powiększamy bok b o 20%, a bok a o 25%;
3. powiększamy bok a o 20%, a potem jeszcze raz o 25%;
4. powiększamy bok b o 20%, a potem jeszcze raz o 25%;
5. powiększamy bok a o 25%, a potem jeszcze raz o 20%;
6. powiększamy bok b o 25%, a potem jeszcze raz o 20%.

Chodzi o to, by otrzymać prostokąt o największym polu. Który sposób wybrać (oczywiście może to zależeć od a i b)?

Odpowiedź zamieszczamy w numerze.

Wszystko, co lata, jest odrzutowcem

Dziwne, dlaczego tak mało ludzi o tym wie, podczas gdy wszystkie niezbędne na ten temat wiadomości zyskujemy już w szkole. Mianowicie dowiadujemy się tam o zasadzie zachowania pędu. Pęd to iloczyn masy poruszającego się ciała i jego prędkości. Dla dowolnej liczby wzajemnie na siebie działających ciał zasada zachowania pędu mówi, że suma pędów wszystkich ciał jest niezmienna.

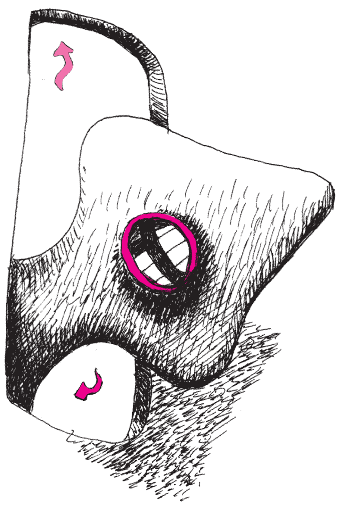


A ma ona ogromne konsekwencje. Przede wszystkim wynika z niej, że żeby jakieś ciało ruszyło, czyli żeby nabrało pędu „w przód", inne ciało musi nabrać takiego samego pędu „w tył". Na tej zasadzie porusza się np. statek, rozpędza bowiem w tył porcje wody, dzięki czemu sam płynie w przód. Dokładnie tak samo jest z samolotem, tyle że w tym przypadku rzecz dzieje się w powietrzu. Nie jest przy tym istotne, czy powietrze jest rozpędzane w tył przez śmigło czy przez turbinę. Inaczej mówiąc, samolot zwany odrzutowym zdecydowaną wyższość siły ciągu zawdzięcza wcale nie wyrzucaniu gazów spalinowych, tylko powietrza. Oto dowód.

Dane techniczne silnika Boeinga 747 mówią, że pojedynczy silnik zużywa paliwo w tempie w przybliżeniu 1 kg/s. Do spalenia kilograma paliwa wystarczy 16 kg powietrza, tymczasem silnik Boeinga przepuszcza przez siebie powietrze w ilości co najmniej o rząd wielkości większej, i to przy spokojnym locie poziomym. Ciąg (równy iloczynowi masy wyrzucanej na sekundę i jej prędkości) powstaje więc w wyniku wyrzucania w tył powietrza w tempie rzędu 200 kg/s z prędkością 300–500 m/s. W gazach opuszczających silnik spalin jest nie więcej niż 10%, bo paliwo służy praktycznie tylko do napędzania turbiny, która w gruncie rzeczy jest śmigłem, tyle że obudowanym. Każdy samolot zwany śmigłowym (nawet helikopter) jest właściwie odrzutowcem, bo lata dzięki odrzutowi mas powietrza, a rodzaj silnika (tłokowy czy turbinowy) nie ma znaczenia. Silnik może być nawet mięśniowy – dzięki odrzutowi powietrza latają przecież owady i ptaki.

Inaczej jest z silnikiem rakietowym. Rakieta zabiera ze sobą oprócz paliwa również utleniacz, dzięki czemu może latać poza atmosferą. Zatem siła ciągu silnika rakietowego pochodzi rzeczywiście z gazów spalinowych. Wymagania stawiane takiemu silnikowi są dużo większe, bowiem aby rakieta w ogóle wystartowała, ciąg jej silników musi być większy od jej ciężaru startowego. Przykładowo, silniki wahadłowca kosmicznego zużywając podczas startu paliwo (proch i wodór z tlenem) w tempie niemal 10 t/s, wyrzucają gazy z prędkością około 3500 m/s. Daje to ciąg równy bez mała 35 MN, zdolny unieść i rozpędzić wahadłowiec o masie startowej 2000 t.

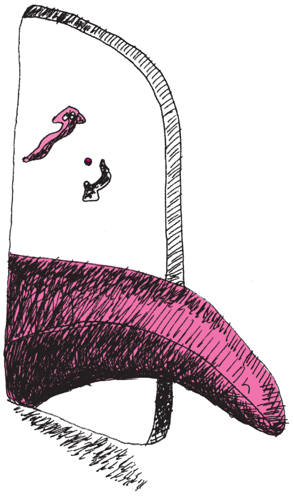
A jak to jest z szybowcem?



Błądzenie we mgle

Każdy z nas słyszał historie o wędrowcach zagubionych we mgle, na pustyni czy w zamieci, którzy błądzili, chodząc w kółko, natrafiając parokrotnie na własne ślady i wyobrażając sobie, że … idą prosto w jednym kierunku. Zjawisko takiego błądzenia zbadano m.in. w znanym doświadczeniu wykonanym na placu Św. Marka w Wenecji. Plac ten ma kształt prostokąta o wymiarach 175 m na 82 m. Eksperyment polegał na tym, że wypuszczano ludzi ze środka krótszego boku z zawiązanymi oczami. Mieli oni za zadanie dotrzeć do przeciwległego boku, wszyscy jednak trafiali na punkty położone na dłuższych bokach prostokąta.

Przyczynę tego zjawiska łatwo zrozumieć, gdy wyobrazimy sobie samochód–zabawkę, w której lewe koła są większe od prawych. Samochodzik taki będzie poruszał się po okręgu. Ponieważ my mamy zwykle jedną nogę silniejszą od drugiej, kroki stawiane przez nas lewą i prawą nogą są różnej wielkości. Jeżeli różnica ta wynosi 1 mm, to po tysiącu kroków jedna noga przejdzie drogę o 1 m dłuższą niż druga. Możliwe to jest tylko wtedy, gdy nasze nogi poruszają się po okręgach o wspólnym środku. Jeżeli mamy jakiś punkt odniesienia, możemy korygować na bieżąco kierunek ruchu, w przeciwnym razie zbaczamy z prostej drogi.



Przyjmijmy, że odległość między lewą i prawą nogą wynosi 10 cm i lewą nogą stawiamy dłuższe kroki. Jeżeli prawa noga będzie poruszać się po okręgu o promieniu R metrów, to lewa po okręgu o promieniu $R+0{,}1$ metrów. Zatem różnica przebytych dróg wynosi (w metrach)

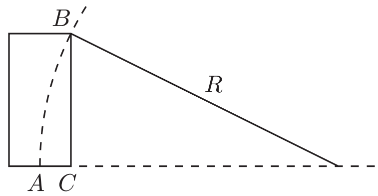
$$2\pi(R+0{,}1)-2\pi R=2\pi\cdot 0{,}1,$$

czyli w przybliżeniu 63 cm. Przyjmijmy, że długość kroku wynosi 0,7 m, a lewą nogą robimy kroki o x metrów dłuższe niż prawą. Na pokonanie okręgu o promieniu R metrów potrzebujemy zatem $\frac{2\pi R}{0{,}7}$ kroków. Lewą nogą wykonamy $\frac{2\pi R}{2\cdot 0{,}7}$ kroków. Mnożąc zatem tę liczbę przez x, uzyskujemy różnicę dróg przebytych lewą i prawą nogą. Mamy równanie:

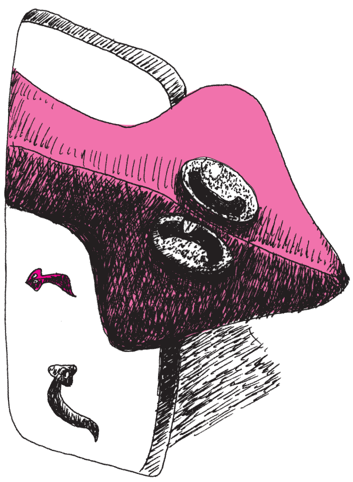
$$\frac{2\pi R}{2\cdot 0{,}7}\cdot x=2\pi\cdot 0{,}1,$$

które daje nam zależność między różnicą kroków i promieniem koła, po którym będziemy „błądzili": $Rx=0{,}14$. Gdy, na przykład, $x=0{,}001\,\mathrm{m}=1\,\mathrm{mm}$, poruszamy się po kole o promieniu 140 m, w zamieci nie uda nam się przejść nawet przez pas pola szerokości 150 m! Gdy $x=0{,}1\,\mathrm{mm}=0{,}0001\,\mathrm{m}$, różnica trudna do zauważenia, promień koła wynosi 1400 m, bez dużej dozy szczęścia nie wydostaniemy się z pasa lasu szerokości 3 km. Zazwyczaj zagubieni wędrowcy poruszają się po kole o promieniu 80–100 m, co odpowiada różnicy kroków około 1,5 mm.

Wróćmy do doświadczenia na placu Św. Marka.



Wyruszamy z punktu A na rysunku. Aby dojść do przeciwległego boku, musimy „trafić" co najmniej w punkt B. Ponieważ $|AC|=41\,\mathrm{m}$, $|BC|=175\,\mathrm{m}$, to promień koła, po którym trzeba się poruszać, można łatwo wyliczyć. Wynosi on około 375 m, co odpowiada różnicy kroków 0,4 mm. Dojść do przeciwległego boku mógł zatem tylko ktoś o różnicy kroków między prawą i lewą nogą mniejszej niż 0,4 mm.



Czasami opisane wyżej zjawisko tłumaczy się nierówną długością nóg. Ale „nierównymi" nogami można stawiać równe kroki i poruszać się po prostej.

Podobne zjawisko zachodzi przy płynięciu łódką we mgle. Silniej wiosłujemy prawą lub lewą ręką i poruszamy się po kole. Gdy na odcinku długości a zbaczamy o odcinek długości b, poruszamy się po kole o promieniu $\frac{a^2+b^2}{2b}$. Łatwe rachunki dotyczące tej sytuacji zostawiam Czytelnikom.

Małą Deltę przygotowali: Marek KORDOS, Tomasz KWAST, Leszek SIDZ.