Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2003

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 463, 464

Redaguje Marcin E. KUCZMA

463. Wyznaczyć największą możliwą długość linii łamanej zamkniętej o następujących własnościach:

- wierzchołki łamanej są różnymi punktami przestrzeni $\mathbb{R}^3$, których współrzędne należą do zbioru $\{0,1,2\}$;
- każde dwa sąsiednie boki łamanej są prostopadłe i mają długość 1.

464. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC, a proste AP, BP, CP przecinają boki BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Dowieść, że

$$|AP|\cdot|BP|\cdot|CP| \geqslant 8\cdot|PD|\cdot|PE|\cdot|PF|.$$

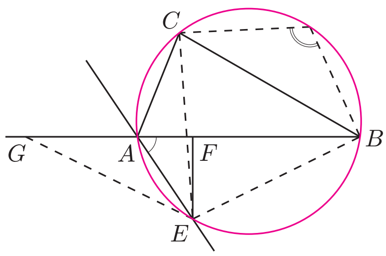
Zadanie 464 zaproponował pan Michał Kieza z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/2003

Przypominamy treść zadań:

455. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| > |AC|$. Dwusieczna kąta zewnętrznego przy wierzchołku A przecina okrąg opisany na tym trójkącie ponownie w punkcie E. Punkt F jest rzutem prostokątnym punktu E na bok AB. Dowieść, że $|AB| - |AC| = 2|AF|$.

456. Czy istnieją takie liczby niewymierne $\alpha > 1$, $\beta > 1$, że dla każdej pary dodatnich liczb całkowitych m, n zachodzi nierówność $\lfloor\alpha^m\rfloor \neq \lfloor\beta^n\rfloor$?



455. Kąt EAB, wpisany w dany okrąg, ma miarę $90^\circ - \frac{1}{2}\cdot|\sphericalangle CAB|$, czyli połowę miary kąta wpisanego opartego na łuku CAB; stąd wniosek, że punkt E jest środkiem tego łuku, a zatem $|BE| = |CE|$.

Na przedłużeniu odcinka BA odkładamy odcinek AG o długości $|AG| = |AC|$. Punkty C i G leżą symetrycznie względem prostej AE (dwusiecznej kąta CAG). Otrzymujemy równość $|EG| = |EC| = |EB|$. Wysokość EF trójkąta równoramiennego BEG jest więc jego środkową: $|FB| = |FG|$. Stąd

$$|AB| - |AC| = |AB| - |AG| = \big(|AF| + |FB|\big) - \big(|FG| - |AF|\big) = 2|AF|.$$

456. Takie liczby istnieją. Przykład: $\alpha = \sqrt{6}$, $\beta = \sqrt{3}$. Przypuśćmy, że dla pewnej pary wykładników całkowitych $m, n \geqslant 1$ zachodzi równość $\lfloor\alpha^m\rfloor = \lfloor\beta^n\rfloor = k$. Wówczas $n \geqslant m$ oraz

$$k^2 \leqslant (\alpha^m)^2 < (k+1)^2, \qquad k^2 \leqslant (\beta^n)^2 < (k+1)^2,$$

czyli

$$k^2 \leqslant 6^m \leqslant k^2 + 2k, \qquad k^2 \leqslant 3^n \leqslant k^2 + 2k.$$

Stąd wynika oszacowanie

$$2k \geqslant |6^m - 3^n| = 3^m|2^m - 3^{n-m}| \geqslant 3^m.$$

Jednocześnie $k \leqslant \alpha^m = 6^{m/2}$. Wobec tego $3^m \leqslant 2\cdot 6^{m/2}$; a taka nierówność ma miejsce jedynie dla $m = 1, 2, 3$. Dla tych trzech wartości wykładnika m część całkowita $\lfloor\alpha^m\rfloor$ przyjmuje wartości 2, 6, 14, rozmijające się z wartościami $\lfloor\beta^n\rfloor$, które dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$ wynoszą kolejno 1, 3, 5, 9, 15. To pokazuje, że liczby $\alpha = \sqrt{6}$, $\beta = \sqrt{3}$ mają własność, o którą chodzi.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań **447** ($WT = 2{,}87$) i **448** ($WT = 1{,}69$) z numeru 10/2002

Janusz Olszewski	– Suwałki	43,08
Tomasz Wietecha	– Tarnów	39,96
Jerzy Cisło	– Wrocław	37,23

Klub 44

Zadania z fizyki nr 360, 361

Redaguje Jerzy B. BROJAN

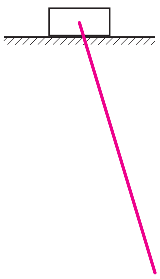
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2003

360. Ocenić orientacyjnie maksymalną prędkość łodzi o długości 10 m, szerokości 2 m i masie 2 tony, jeśli napędzający ją silnik rozwija moc 50 kW.

361. Według ogólnej teorii względności gwiazda odchyla przebiegające w jej pobliżu promienie świetlne. Odchylenie to można analizować, przyjmując, że na zewnątrz gwiazdy o masie M w odległości r od jej środka współczynnik załamania przestrzeni wynosi $n = 1 + \frac{2a}{r}$, gdzie $a = \mathrm{G}M/\mathrm{c}^2$ (M – masa gwiazdy, G – stała grawitacji). Obliczyć kąt odchylenia promienia przebiegającego tuż obok Słońca. Jeśli źródło światła jest bardzo odległe, to czy czas zwłoki (nadwyżka czasu przejścia promienia, wynikająca z jego spowolnienia w polu grawitacyjnym) ma skończoną wartość? Masa Słońca wynosi $2 \cdot 10^{30}$ kg, średnica $1{,}4 \cdot 10^6$ km.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/2003

Przypominamy treść zadań:



352. Jednorodny pręt może się obracać bez tarcia wokół poziomej osi osadzonej w klocku spoczywającym na poziomej powierzchni (rys.). Jaka jest minimalna wartość współczynnika tarcia między klockiem a powierzchnią niezbędna do tego, aby po odchyleniu pręta do poziomu i puszczeniu klocek nie ruszył z miejsca? Masa klocka jest pomijalnie mała w porównaniu z masą pręta.

353. W doświadczeniu opisanym w jednym z zeszłorocznych numerów *Wiedzy i Życia* badano zimne neutrony (tzn. neutrony o bardzo małej energii kinetycznej) odbijające się od poziomej powierzchni i wykryto ich kwantowe poziomy energetyczne w polu grawitacyjnym Ziemi. Według podanej informacji wysokość stopnia między sąsiednimi poziomami wynosiła 15 µm. Zastosować analizę wymiarową w celu potwierdzenia tej wartości (co do rzędu wielkości).

352. Niech długość pręta wynosi $2l$, jego masa – m, a kąt odchylenia od pionu – α. Wprowadźmy także oznaczenie momentu bezwładności pręta względem punktu zawieszenia I, prędkości kątowej $\omega = \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t$ i przyspieszenia kątowego $\varepsilon = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$. Podstawowe (i wzajemnie równoważne) równania opisujące ruch pręta to II zasada dynamiki ruchu obrotowego i zasada zachowania energii:

$$I\varepsilon = -mgl\sin\alpha, \qquad \frac{1}{2}I\omega^2 = mgl\cos\alpha.$$

Po podstawieniu $I = \frac{4}{3}ml^2$ równania te przybierają postać

$$4l\varepsilon = -3\mathrm{g}\sin\alpha, \quad 2l\omega^2 = 3\mathrm{g}\cos\alpha.$$

Składową poziomą F_x i pionową F_y siły działającej na górny koniec pręta wyznaczymy z II zasady dynamiki ruchu postępowego środka pręta

$$F_x = m\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2, \qquad F_y = mg - m\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2,$$

gdzie $x = l\sin\alpha$, $y = l\cos\alpha$ (oś y jest zwrócona w dół).
Dwukrotne różniczkowanie daje wyrażenia

$$\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = l\varepsilon\cos\alpha - l\omega^2\sin\alpha, \quad \mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2 = -l\varepsilon\sin\alpha - l\omega^2\cos\alpha.$$

Wykorzystując wyżej wyprowadzone wzory na ε i ω^2, otrzymujemy zależność F_x i F_y od α:

$$F_x = -\frac{9}{4}mg\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{9}{8}mg\sin 2\alpha,$$

$$F_y = mg\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2\alpha + \frac{3}{2}\cos^2\alpha\right) = mg\left(\frac{11}{8} + \frac{9}{8}\cos 2\alpha\right).$$

Widzimy, że maksymalna bezwzględna wartość ilorazu F_x/F_y występuje dla $\alpha = 45^\circ$ i jest równa $\frac{9}{11}$. Tyle musi wynosić współczynnik tarcia, aby klocek nie ruszył z miejsca.

353. Należy wyrazić wielkość l o wymiarze długości przez stałą Plancka h, masę neutronu m oraz przyspieszenie ziemskie g. Zgodność wymiarów osiągniemy tylko wtedy, gdy

$$l = (\text{stała bezwymiarowa}) \cdot \sqrt[3]{\frac{h^2}{m^2\mathrm{g}}}.$$

Podstawiając dane liczbowe $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Js, $m = 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg, $\mathrm{g} = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$, znajdujemy wartość pierwiastka równą 25 µm, co oznacza zadowalającą zgodność.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
348 ($WT = 1{,}85$) i **349** ($WT = 2{,}95$)
z numeru 12/2002

Aleksander Surma	– Myszków	44,06
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	43,22
Marek Wójcicki	– Szczecin	42,07
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	34,91
Tomasz Wietecha	– Tarnów	30,76
Marian Łupieżowiec	– Gliwice	20,09
Michał Jóźwikowski	– Błonie	12,65

Pan Aleksander Surma jest już trzecim Weteranem, który zdobył 44 punkty po raz czwarty.