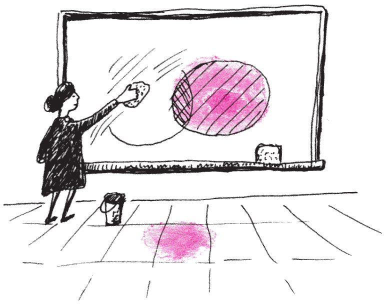
Zbiory rozmyte dla początkujących

Piotr DWORNICZAK

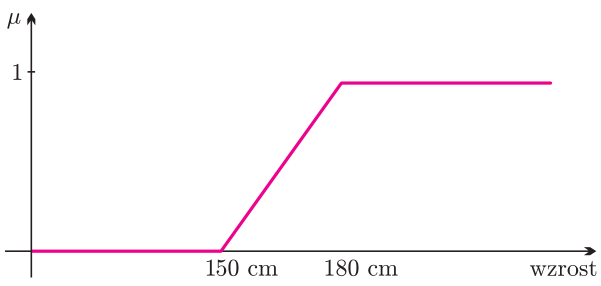


Czy matematyka jest nauką ścisłą? Większość odpowiada na takie pytanie twierdząco. A czy jest przydatna w życiu, w innych naukach? Na to pytanie odpowiedzi mogą być bardziej zróżnicowane. Może w technice, gdzie wymagane są dokładne obliczenia i precyzja, ale np. w biologii czy medycynie? Dawno już wyśmiane zostały zalecenia mówiące o tym, że należy dziennie spożywać np. 57 g białka, 189 g węglowodanów itp. Obecnie wskazuje się, że zapotrzebowanie organizmu to około tyle i tyle przy umiarkowanych warunkach klimatycznych i ciężkiej pracy fizycznej. Gdzie tu ścisła matematyka? Otóż pojawiła się i tu, choć co prawda, jak na czas jej rozwoju, stosunkowo niedawno wraz z opisaniem tzw. zbiorów rozmytych.

Zbiór (klasyczny) jest tzw. pojęciem pierwotnym, tzn. pojęciem, którego nie można zdefiniować za pomocą pojęć prostszych. Zakłada się przy tym, że dowolny element do zbioru albo należy, albo nie należy.

W języku naturalnym często występują jednak określenia zbiorów, dla których właściwie niezbędne jest wprowadzenie pośrednich stopni przynależności elementów. Popularnym przykładem takiego zbioru jest zbiór W ludzi wysokich. Czy człowiek, mający 170 cm wzrostu, jest wysoki? A 169 cm? A 168 cm? Gdzie leży granica między „wysokimi”, a „nie wysokimi” ludźmi? Próba ustalenia takiej granicy jest śmieszna i nie może skończyć się zadowalającym rezultatem, usiłujemy bowiem przejść w tym miejscu z wygodnego, naturalnego opisu świata za pomocą pojęć jakościowych do opisu za pomocą pojęć ilościowych.

Nie należy tego problemu porzucać, lecz przyjąć, że każdy człowiek jest wysoki, ale w pewnym stopniu! Stopień ten jest podany za pomocą liczby z przedziału $[0,1]$. Może to wyglądać następująco: ludzi o wzroście poniżej 150 cm nie uważamy za wysokich, więc przypisujemy im stopień 0 przynależności do zbioru W ludzi wysokich, natomiast ludzi o wzroście powyżej 180 cm za wysokich uważamy – przypisujemy im stopień przynależności równy 1. Osoby o wzroście między 150 a 180 cm mogą być również uznane za „wysokie”, przy czym stopień przynależności jest pośredni – między 0 a 1. Można to przedstawić graficznie jak na rysunku 1.



Rys. 1. Funkcja przynależności zbioru rozmytego ludzi „wysokich”.

Z punktu widzenia matematyki jest to wykres pewnej funkcji. Wartość $\mu(x)$ w danym punkcie x (tzn. dla danego wzrostu x) interpretowana jest jako stopień, w jakim osoba o wzroście x należy do zbioru W ludzi wysokich.

Tego typu koncepcję opisu nieostro określonych zbiorów podał po raz pierwszy w artykule „Fuzzy sets” w czasopiśmie *Information and Control* w 1965 roku Lofti A. Zadeh, nazywając je zbiorami rozmytymi (*fuzzy sets*).

Formalnie zbiór rozmyty A określony w pewnej przestrzeni X to zbiór

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\},$$

gdzie $\mu_A : X \to [0,1]$ jest funkcją nazywaną funkcją przynależności zbioru rozmytego A.

Wartość $\mu_A(x)$ jest więc liczbą z przedziału $[0,1]$, a nazywana jest stopniem przynależności elementu x do zbioru A. Podanie zbioru rozmytego jest, inaczej mówiąc, podaniem klasycznego zbioru elementów, których przynależność rozważamy, wraz z ich stopniami przynależności. Zbiór X nazywany jest przestrzenią albo uniwersum, na którym określamy zbiór rozmyty. W przykładzie o „wysokich” osobach uniwersum to zbiór ludzi (dokładniej – wzrostu ludzi). Mamy tu pierwszą osobliwość zbiorów rozmytych:

funkcja przynależności, tzn. funkcja określająca zbiór rozmyty, jest subiektywna (!), podawana przez człowieka.

Rozważmy inny przykład. Mamy cztery pralki oznaczone p, r, s, t, o podanych cenach 1000 zł, 1100 zł, 1300 zł, 1700 zł i klasach energetycznych $D, C2, B, C1$. Zbiór T tanich pralek może być określony następująco:

$$T = \{(p; 1), (r; 0{,}9), (s; 0{,}7), (t; 0{,}4)\},$$

co oznacza, że pralkę p uznajemy za tanią w stopniu 1, pralkę r w stopniu 0,9 itd. Inaczej zbiór T zapisuje się w postaci

$$T = \{p/1, r/0{,}9, s/0{,}7, t/0{,}4\}.$$

W tym przypadku uniwersum to zbiór tylko tych czterech rozważanych pralek. Jest to zbiór skończony i dlatego wygodnie zapisywać zbiór rozmyty w jednej z powyższych postaci.

Określmy jeszcze (np. na podstawie pewnych danych fabrycznych) zbiór pralek energooszczędnych

$$E = \{p/0{,}3, r/0{,}5, s/0{,}7, t/0{,}4\}.$$

Pojawia się teraz naturalne pytanie o wybór pralki, która będzie tania i energooszczędna. Z punktu widzenia algebry zbiorów chodzi o wyznaczenie części wspólnej dwóch zbiorów rozmytych. Najczęściej stosowane podejście zostało wprowadzone przez Zadeha. Stopniem przynależności danego elementu x do zbioru $A \cap B$ jest minimum ze stopni przynależności do zbioru A i do zbioru B. W przykładzie z pralkami

$$T \cap E = \{p/0{,}3, r/0{,}5, s/0{,}7, t/0{,}4\}.$$

Zatem najbardziej „tania i energooszczędna” pralka to s.

Widać w tym momencie przewagę zbiorów rozmytych nad klasycznymi. Przy wyborach na podstawie kilku kryteriów w przypadku zbiorów klasycznych najczęściej dochodzi się do wniosku, że nie ma elementu spełniającego jednocześnie wszystkie postulowane warunki. W przypadku stosowania zbiorów rozmytych każdy (!) element spełnia wszystkie warunki, aczkolwiek w pewnym stopniu. Należy następnie znaleźć taki, dla którego stopień ten jest największy. Wybory podobne do wyboru naszych pralek mogą dotyczyć wielu poważnych zagadnień.

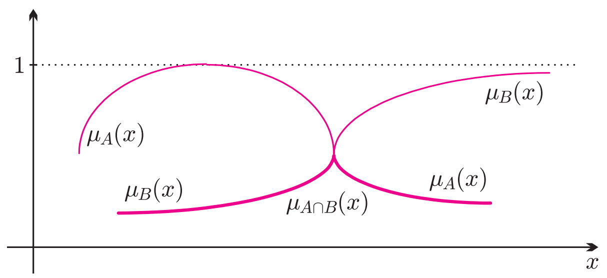
Powyżej przedstawione wyznaczenie iloczynu zbiorów nie jest jednoznaczne. Najczęściej stopień przynależności określany jest formułą

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Innym sposobem wyznaczenia tego stopnia jest tzw. iloczyn algebraiczny lub probabilistyczny

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x).$$

Nie można podać jednoznacznego sposobu wyznaczenia iloczynu zbiorów rozmytych. Funkcję przynależności iloczynu typu minimum wyznaczyć można łatwo jak na rysunku 2.



Rys. 2. Funkcja przynależności (typu minimum) iloczynu zbiorów rozmytych A i B.

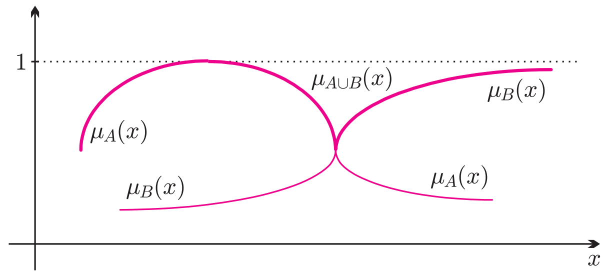
Podobne jak przy iloczynie problemy występują przy wyznaczaniu sumy zbiorów rozmytych. Najczęściej stopień przynależności wyznaczany jest formułą podaną przez Zadeha

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

Innym sposobem wyznaczenia tego stopnia jest tzw. suma algebraiczna lub probabilistyczna

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x).$$

Nie można podać jednoznacznego sposobu wyznaczenia sumy zbiorów rozmytych. Łatwo można graficznie pokazać wyznaczenie sumy postaci maksimum jak na rysunku 3.



Rys. 3. Funkcja przynależności (typu maksimum) sumy zbiorów rozmytych A i B.

Oprócz sumy i iloczynu zbiorów podstawowym pojęciem jest także dopełnienie zbioru rozmytego. Dla danego zbioru rozmytego A określonego przez funkcję przynależności μ_A dopełnienie A' określone jest przez funkcję przynależności

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

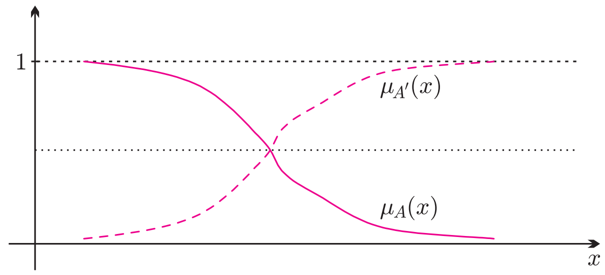
Przykładowo, gdy w przestrzeni $X = \{a, b, c, d\}$ określimy zbiór A postaci

$$A = \{a/0{,}4, b/0{,}5, c/1, d/0{,}1\},$$

to

$$A' = \{a/0{,}6, b/0{,}5, c/0, d/0{,}9\}.$$

Dopełnienie można też zobrazować graficznie jak na rysunku 4.



Rys. 4. Funkcja przynależności dopełnienia zbioru rozmytego A.

W większości źródeł nie podaje się innego sposobu wyznaczenia dopełnienia zbioru rozmytego. Nie znaczy to jednak, że jest to niemożliwe. Ogólnie dopełnienie związane jest z operatorem logicznym negacji, nie można go jednak wyznaczyć jednoznacznie. Mamy zatem drugą osobliwość zbiorów rozmytych:

część wspólna i suma zbiorów rozmytych oraz dopełnienie zbioru rozmytego mogą być określone poprawnie na różne sposoby (!).

W klasycznym rachunku zbiorów występuje jeszcze różnica zbiorów $A - B$, ale ponieważ zachodzi równość $A - B = A \cap B'$, więc korzysta się z niej również w rachunku zbiorów rozmytych, wykorzystując oczywiście różne określenia części wspólnej i dopełnienia.

Przy definicji i działaniach na zbiorach rozmytych podstawową sprawą jest określenie funkcji przynależności. Zazwyczaj funkcje te określane są przez człowieka-eksperta, przy uwzględnieniu jego doświadczenia i wiedzy oraz danych opisujących rozważane obiekty. Jest to kolejna osobliwość:

określenie funkcji przynależności zbiorów rozmytych i adekwatnych działań na nich jest wielką sztuką, bo nie jest jednoznaczne.

Czy wobec różnorodnych trudności i osobliwości warto stosować zbiory rozmyte i je badać? No cóż, na co dzień świetnie dajemy sobie radę z rozumieniem i przetwarzaniem informacji typu „przyjdź *około* czwartej na spotkanie w gronie *najbliższych* znajomych i przynieś *trochę* tych *dobrych* kiełbasek do grilowania". Skoro więc często operujemy nieprecyzyjnymi jakościowymi ludzkimi określeniami, to – być może – należy również przetwarzać je na „ludzki" sposób.

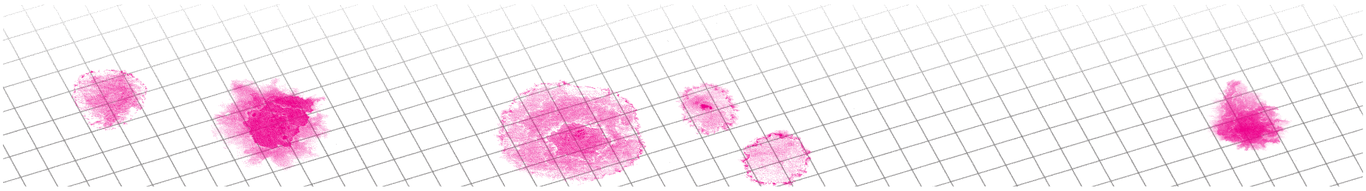
Niezależnie od wad i zalet teoria zbiorów rozmytych rozwija się i jest stosowana. Największą osobliwością jest, moim zdaniem, właśnie to, że to wszystko działa w praktyce! Zbiory rozmyte są z powodzeniem stosowane w technice i przynoszą wymierne, konkretne i zupełnie nierozmyte korzyści. Coraz częściej spotykamy na urządzeniach napis fuzzy lub fuzzy logic – FL. Tak jest, na przykład, w przypadku dostępnych na naszym rynku pralek: Candy – ACS 1040, ACS 840, CSBL100PL, Hoover – AI 1040, AI 120, AL 120, Miele – W 487 WPS, W 433E, Elektrolux – EW 1220N, EW 1267F, Siemens – WIQ 1430, chłodziarko-zamrażarek: Haier – HRF 348A, HRF 368A, HRF 368/2, kamer video: Sanyo, Sony (w tych kamerach chodzi o optymalizację ostrości oraz kompensację przypadkowych poruszeń kamery związanych z drganiem ręki i umiejętności odróżnienia ich od ruchu filmowanego obiektu i ruchu kamery przy robieniu panoramy – dzięki FL zapobiega się „bezmyślnemu" działaniu stabilizatora obrazu).

Zainteresowanym zbiorami rozmytymi polecam literaturę (tu tylko wybrane pozycje po polsku):

J. Kacprzyk: *Wieloetapowe sterowanie rozmyte.* WNT, Warszawa 2001.

A. Łachwa: *Rozmyty świat zbiorów, liczb, relacji, faktów i decyzji.* AOW EXIT, Warszawa 2001.

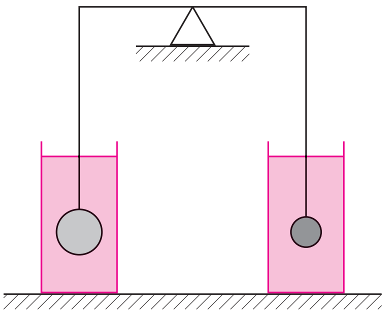
A. Piegat: *Modelowanie i sterowanie rozmyte.* AOW EXIT, Warszawa 1999.



Zadania

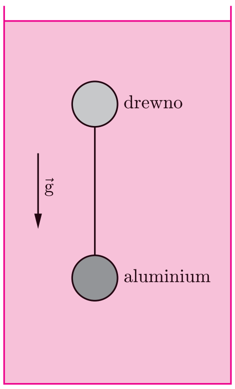
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 605. Do belki o równych ramionach przymocowane są dwa ciężary o jednakowej masie. Każdy z nich jest zanurzony w cieczy o gęstości ρ_1 i ρ_2, odpowiednio. Znaleźć stosunek gęstości ciężarów, dla którego waga znajduje się w równowadze.
Rozwiązanie na str. 4



Rys. 1

F 606. Dwie kulki o jednakowym promieniu $R = 1$ cm, jedna z aluminium, druga z drewna, połączone długą nicią, są w całości zanurzone w wodzie, poruszając się ze stałą pionową prędkością. Znaleźć siłę oporu wody działającą na każdą z kulek. Gęstość aluminium $\rho_1 = 2{,}7 \cdot 10^3$ kg/m^3, drewna $\rho_2 = 0{,}5 \cdot 10^3$ kg/m^3, wody $\rho_0 = 1 \cdot 10^3$ kg/m^3. Przyjąć, że przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 10$ m/s^2.
Rozwiązanie na str. 16



Rys. 2

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

$[x]$ i $\{x\} = x - [x]$ oznaczają, odpowiednio, część całkowitą i część ułamkową liczby $x \in \mathbb{R}$.

M 1039. Niech $a_n = \left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right]$, $n = 1, 2, \ldots$ Dla jakich liczb naturalnych n zachodzi nierówność $a_{n+1} < a_n$?
Rozwiązanie na str. 12

M 1040. Udowodnić, że jeśli $[\sqrt{n} + \frac{3}{2}] = [\sqrt{n+1} + \frac{1}{2}]$ dla $n \in \mathbb{N}$, to $n = a^2 + a$, dla pewnego $a \in \mathbb{N}$.
Rozwiązanie na str. 12

M 1041. Udowodnić, że $\left[\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{8n+3}\right] = \left[\sqrt[3]{27n+1}\right]$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.
Rozwiązanie na str. 16