O polu pewnego trójkąta

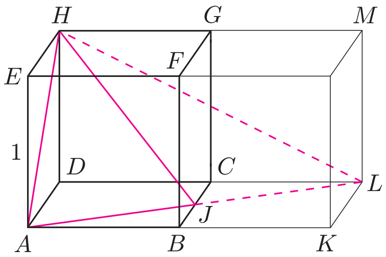
Tomasz ŻUKOWSKI

Czy zadanie polegające na obliczeniu pola danego trójkąta może mieć ciekawe rozwiązanie? Myślę, że większość Czytelników wzruszy ramionami i odpowie – nie. A jednak...

Zadanie. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi 1, J jest środkiem krawędzi BC tego sześcianu. Obliczyć pole trójkąta AJH (rys. 1).

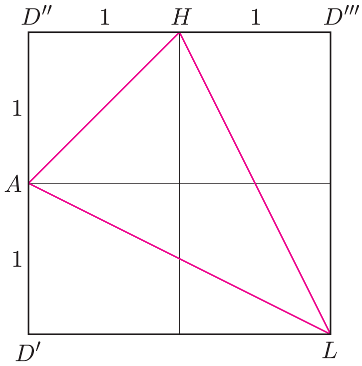
Rozwiązanie 1 (sprytne)

Do danego sześcianu dobudujmy drugi i zauważmy, że HJ jest środkową tego trójkąta, zatem szukane pole jest połową pola trójkąta ALH.



Rys. 1

Obliczenie pola trójkąta równoramiennego ALH nie stanowi już problemu, ale my nie skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa. Sprawdźmy, że rysunek 2 przedstawia siatkę czworościanu $ALHD$. Rzeczywiście, trójkąty ADH, ADL i LDH przystają do odpowiednich trójkątów siatki (cecha przystawania trójkątów: (bok, kąt, bok)). Zatem trójkąt ALH też przystaje do odpowiedniego trójkąta siatki (bok, bok, bok).



Rys. 2

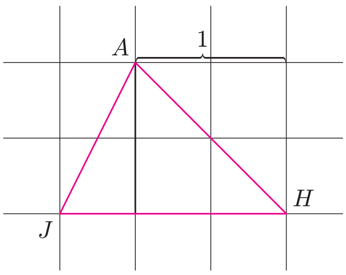
Pozostało odejmowanie

$$P_{\Delta ALH} = 4 - 1 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

tak więc $P_{\Delta AJH} = \frac{3}{4}$.

A przy okazji, ciekawostka: $ALHD$ jest jedynym, z dokładnością do podobieństwa, czworościanem o kwadratowej siatce.

Rozwiązanie 2 (cyrkowe)



Rys. 3

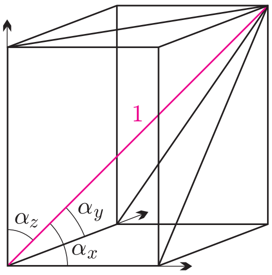
Obliczmy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, długości odcinków

$$AJ = \frac{\sqrt{5}}{2}, \qquad JH = \frac{3}{2}, \qquad HA = \sqrt{2},$$

weźmy papier w kratkę (bok oczka siatki $= \frac{1}{2}$) i spróbujmy narysować trójkąt AJH (rys. 3).

Ze zdziwieniem (lub bez) stwierdzamy, że można to zrobić tak, aby wierzchołki były punktami kratowymi. Bez trudu obliczamy pole.

Rozwiązanie 3 (długie, ale ogólne)



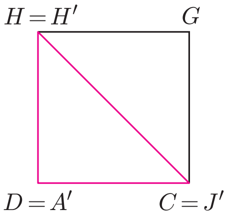
Rys. 4

Rozpocznijmy od nietypowego sformułowania twierdzenia Pitagorasa:

Kwadrat długości odcinka jest równy sumie kwadratów długości rzutów prostokątnych tego odcinka na osie dowolnie wybranego kartezjańskiego układu współrzędnych (na płaszczyźnie lub w przestrzeni).

Czy istnieje analogiczne twierdzenie dotyczące pola figury płaskiej? Okazuje się, że tak.

Twierdzenie. Kwadrat pola figury płaskiej położonej w przestrzeni jest równy sumie kwadratów pól rzutów prostokątnych tej figury na płaszczyzny dowolnie wybranego kartezjańskiego układu współrzędnych.



Rys. 5a

Dowód. Niech f będzie figurą płaską, a f_x, f_y, f_z rzutami prostokątnymi figury f na płaszczyzny Oyz, Ozx i Oxy odpowiednio. Kąty dwuścienne utworzone przez płaszczyznę figury f i płaszczyzny układu (równe kątom utworzonym przez prostą prostopadłą do płaszczyzny figury f i osie układu) oznaczmy α_x, α_y, α_z.

Wiemy, że

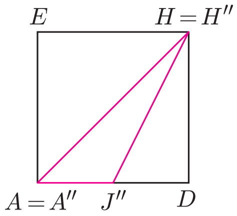
$$P_{f_x} = P_f \cos\alpha_x, \quad P_{f_y} = P_f \cos\alpha_y, \quad P_{f_z} = P_f \cos\alpha_z$$

oraz (z twierdzenia Pitagorasa, rys. 4)

$$\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z = 1.$$

Po podstawieniu otrzymujemy tezę:

$$P_f^2 = P_{f_x}^2 + P_{f_y}^2 + P_{f_z}^2.$$

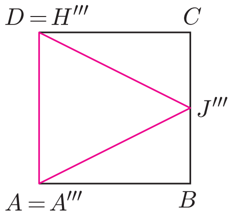


Rys. 5b

Wybierzmy proste AB, AD, AE jako osie współrzędnych i zastosujmy powyższe twierdzenie do trójkąta AJH. Oto rzuty naszego trójkąta na płaszczyzny układu współrzędnych – rysunki 5a, 5b, 5c.

$$P_{AHJ}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

i jeszcze raz $P_{\Delta AJH} = \frac{3}{4}$.

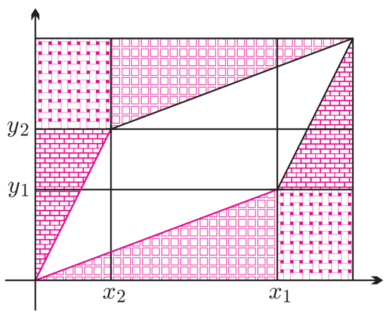


Rys. 5c

Rozwiązanie 3 nie wykorzystuje żadnych szczególnych cech danego trójkąta, więc można je uogólnić do odpowiedzi na nastepujące pytanie: jak obliczyć pole trójkąta położonego w przestrzeni, mając dane współrzędne jego wierzchołków $A=(x_1,y_1,z_1)$, $B=(x_2,y_2,z_2)$, $C=(x_3,y_3,z_3)$?

Przypomnijmy, na początek, rozwiązanie podobnego zadania na płaszczyźnie. Oto równoległobok rozpięty na wektorach $\overrightarrow{v} = [x_1, y_1]$ i $\overrightarrow{u} = [x_2, y_2]$ (rys. 6). Odejmując od pola dużego prostokąta pola zacieniowane, otrzymujemy:

$$P_{\square} = |(x_1+x_2)(y_1+y_2) - x_1y_1 - x_2y_2 - 2x_2y_1| = |x_1y_2 - x_2y_1|.$$



Rys. 6

Jako oczywisty wniosek otrzymujemy następującą formułę na pole trójkąta o wierzchołkach $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$, $C=(x_3,y_3)$:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|(x_2-x_1)(y_3-y_1) - (x_3-x_1)(y_2-y_1)|$$

oraz wzór na pole trójkąta o wierzchołkach $A=(x_1,y_1,z_1)$, $B=(x_2,y_2,z_2)$, $C=(x_3,y_3,z_3)$:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\big[((y_2-y_1)(z_3-z_1)-(y_3-y_1)(z_2-z_1))^2 + ((x_2-x_1)(z_3-z_1)-$$
$$-(x_3-x_1)(z_2-z_1))^2 + ((x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1))^2\big]^{\frac{1}{2}}.$$

Wzór może nieporęczny, ale od czego są komputery?

Rozwiązanie 4

Podstawmy w powyższym wzorze za A, B, C punkty $A=(0,0,0)$, $J=\left(1,\frac{1}{2},0\right)$, $H=(0,1,1)$ i już.

Rozwiązanie 5

Jeśli mowa o nieporęcznych wzorach, to nie sposób zapomnieć o wzorze Herona:

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

gdzie a, b, c są długościami boków, a p połową obwodu trójkąta.

W naszym przypadku: $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $c=\sqrt{2}$, $p=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}+\sqrt{2}\right)$.

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}+\tfrac{1}{4}\sqrt{5}+\tfrac{3}{4}\right)\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}+\tfrac{1}{4}\sqrt{5}-\tfrac{3}{4}\right)\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}-\tfrac{1}{4}\sqrt{5}+\tfrac{3}{4}\right)\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}+\tfrac{1}{4}\sqrt{5}+\tfrac{3}{4}\right)} =$$
$$= \ldots = \tfrac{1}{16}\sqrt{9}\sqrt{16} = \tfrac{3}{4}.$$

Uff, udało się.