Klub 44

$$\sqrt[\otimes]{\sum\!\!\!\!\int !}=44$$

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 V 2004

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Rozwiązanie zadania M 1056.
Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą większą od 1. Wówczas liczba

$$b = \frac{1}{6}(a - 9\cdot 0,1111\ldots) = \frac{1}{6}(a-1)$$

jest liczbą dodatnią. Liczbę tę możemy przedstawić w postaci sumy dziewięciu liczb dodatnich $b_1, b_2, \ldots, b_9$, z których każda ma w rozwinięciu dziesiętnym jedynie cyfry 0 lub 1. Można to zrobić tak, jak to pokazano na poniższym przykładzie:

$$\begin{array}{r}
1{,}1111111\\
1{,}0101111\\
1{,}0101101\\
0{,}0101101\\
0{,}0001101\\
0{,}0000101\\
0{,}0000100\\
0{,}0000100\\
+\ 0{,}0000100\\
\hline
3{,}1415926
\end{array}$$

Stąd uzyskujemy

$$\begin{aligned}a = 6b+1 = {}&(6b_1 + 0,1111\ldots)+\\ &+(6b_2+0,1111\ldots)+\\ &+\ldots+\\ &+(6b_9+0,1111\ldots)\,.\end{aligned}$$

Pozostaje zauważyć, że każda z liczb $(6b_k + 0,1111\ldots)$ dla $k = 1, 2, \ldots, 9$ jest liczbą szczęśliwą.

Zadania z matematyki nr 477, 478

Redaguje Marcin E. KUCZMA

477. Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{1 + x_1^2 + \ldots + x_k^2} < \sqrt{n}.$$

478. W trójkącie ABC wysokość CD dzieli kąt przy wierzchołku C tak, że $|\sphericalangle BCD| = 2\cdot|\sphericalangle ACD|$. Odcinek CE jest dwusieczną kąta BCD; punkty D, E leżą na odcinku AB. Wykazać, że $|AD|\cdot|BC| = |CD|\cdot|BE|$.

Zadanie 478 zostało opracowane na podstawie propozycji, którą zgłosił pan Krzysztof Kamiński z Pabianic.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/2003

Przypominamy treść zadań:

469. Skończony zbiór liczb naturalnych A będziemy nazywać *dopuszczalnym*, jeśli nie zawiera żadnej pary liczb kolejnych. Dla każdego takiego zbioru oznaczmy przez $\pi(A)$ iloczyn wszystkich liczb w tym zbiorze (dla zbioru pustego przyjmujemy $\pi(\emptyset) = 1$).
Dana jest liczba naturalna n. Obliczyć sumę kwadratów liczb $\pi(A)$, odpowiadających wszystkim zbiorom dopuszczalnym zawartym w zbiorze $\{1, \ldots, n\}$.

470. W kwadracie o boku długości 1 leży n-kąt wypukły ($n \geqslant 3$). Dowieść, że pewne trzy kolejne wierzchołki tego wielokąta są wierzchołkami trójkąta o polu nie większym niż $8/n^2$.

469. Oznaczmy szukaną wartość przez $F(n)$. Ustalmy $n \geqslant 2$. Rodzina wszystkich zbiorów dopuszczalnych, które są zawarte w zbiorze $\{1, \ldots, n\}$, składa się z tych zbiorów dopuszczalnych A, które są zawarte w zbiorze $\{1, \ldots, n-1\}$, oraz zbiorów postaci $A = A_0 \cup \{n\}$, gdzie A_0 jest dopuszczalnym podzbiorem zbioru $\{1, \ldots, n-2\}$. Suma kwadratów liczb $\pi(A)$ dla zbiorów A pierwszego typu wynosi $F(n-1)$. Suma kwadratów liczb $\pi(A)$ dla zbiorów A drugiego typu wynosi $n^2F(n-2)$. Otrzymujemy zależność rekurencyjną

$$F(n) = F(n-1) + n^2F(n-2)$$

z oczywistymi warunkami początkowymi $F(0) = 1$, $F(1) = 2$. Korzystając z uzyskanego wzoru rekurencyjnego, dostajemy przez łatwą indukcję odpowiedź: $F(n) = (n+1)!\,$.

470. Przyjmijmy, że kolejne boki wielokąta mają długości $a_1, \ldots, a_n$. Rzutujemy je na dwa prostopadłe boki kwadratu AB i BC. Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą długościami rzutów na odcinek AB, a $y_1, \ldots, y_n$ długościami rzutów na odcinek BC. Wielokąt jest wypukły, więc rozważane rzuty pokrywają każdy z odcinków AB i BC co najwyżej dwukrotnie. Stąd

$$\sum x_i \leqslant 2, \qquad \sum y_i \leqslant 2.$$

Przy tym

$$a_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \leqslant x_i + y_i,$$

więc $\sum a_i \leqslant 4$, i wobec tego

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + a_{i+1}) \leqslant 8$$

(numeracja cykliczna, $a_{n+1} = a_1$). Istnieje zatem co najmniej jeden numer k, dla którego

$$a_k + a_{k+1} \leqslant \frac{8}{n}.$$

Liczby a_k i a_{k+1} są długościami dwóch kolejnych boków wielokąta. Pole S trójkąta wyznaczonego przez te dwa boki spełnia nierówność, którą chcieliśmy uzyskać:

$$S \leqslant \frac{a_ka_{k+1}}{2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)^2 \leqslant \frac{8}{n^2}\,.$$

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 V 2004

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
362 ($WT = 3{,}20$) i **363** ($WT = 1{,}65$)
z numeru 9/2003

Jacek Piotrowski	– Rzeszów	14,10
Leszek Grzanka	– Chechło	14,03
Tomasz Wietecha	– Tarnów	12,27
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	12,12

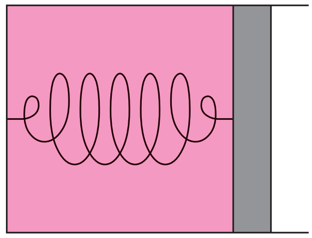
Pół roku temu tak się złożyło, że praktycznie cała czołówka ligowa zakończyła swoje kolejne 44-punktowe rundy. Dlatego w kilku numerach nie podawaliśmy wyników (nie było czołówki godnej tej nazwy), a i teraz punktacja jest wyjątkowo niska.

Zadania z fizyki nr 374, 375

Redaguje Jerzy B. BROJAN

374. Koła roweru jadącego z prędkością 5 m/s mają średnicę 1 m. Na jaką maksymalną wysokość (nad ziemią) może się wznieść grudka błota oderwana od opony tego roweru?

375. Gaz doskonały jest zamknięty w cylindrze (rys. 1) tłokiem połączonym z dnem cylindra sprężyną o stałej sprężystości k i zerowej długości swobodnej (tzn. siła wywierana przez sprężynę jest równa zeru, gdy tłok styka się z dnem cylindra). Na zewnątrz cylindra jest próżnia. Ile ciepła trzeba dostarczyć, aby ogrzać 1 mol tego gazu o 1 stopień, jeśli dla przemiany w stałej objętości analogiczne ciepło jest równe C_V?



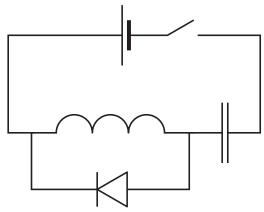
Rys. 1

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/2003

Przypominamy treść zadań:

366. Ile stali trzeba, aby wykonać linę o długości $l = 15$ km, która zawieszona pionowo utrzyma doczepiony do jej dolnego końca ciężar równy $P = 1000$ N? Gęstość stali wynosi $\rho = 7{,}8\ \mathrm{g/cm^3}$, a jej wytrzymałość $W = 1{,}5 \cdot 10^5\ \mathrm{N/cm^2}$. Rozciągliwość (sprężystość) stali, a także zmiany natężenia pola grawitacyjnego można zaniedbać. Grubość liny nie musi być stała.

367. Zestawiono obwód (rys. 2) składający się ze źródła napięcia 3 V, zwojnicy o indukcyjności 0,8 H, kondensatora o pojemności 2000 µF i doskonałej diody świecącej o napięciu progowym 1 V (o oporze zerowym, jeśli napięcie w kierunku przewodzenia przekroczy wartość progową, i oporze nieskończonym w innym przypadku). W chwili początkowej kondensator był nienaładowany. Po jakim czasie od zamknięcia klucza dioda zaświeciła i jak długo trwał ten sygnał?



Rys. 2

366. Niech pole przekroju liny S będzie funkcją wysokości h (równej 0 na dolnym końcu i l na górnym). Lina będzie miała najmniejszą masę, jeśli dla każdej wartości h pole S będzie minimalne (na granicy zerwania). Oznacza to, że ciężar odcinka liny o długości dh

$$\mathrm{d}P = \rho \mathrm{g} S \mathrm{d}h$$

równa się przyrostowi wytrzymałości liny wynikającemu ze wzrostu pola przekroju o dS:

$$\mathrm{d}P = W \mathrm{d}S.$$

Rozwiązaniem równania różniczkowego jest funkcja

$$S(h) = S_0 \exp(\rho \mathrm{g} h / W).$$

Wartość pola przekroju na dolnym końcu wynika z zawieszonego ciężaru, tzn.

$$S_0 = P/W,$$

natomiast szukaną masę liny m wyznaczymy z pola przekroju na górnym końcu:

$$m = \frac{W(S(l) - S_0)}{\mathrm{g}} = \frac{P}{\mathrm{g}}\left(\exp\left(\frac{\rho \mathrm{g} l}{W}\right) - 1\right) = 117\ \mathrm{kg}.$$

367. Pomijając na razie diodę, okres drgań obwodu LC wynosi

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 0{,}2513\ \mathrm{s},$$

amplituda napięcia wynosi $U_0 = 3$ V, a zatem amplituda natężenia prądu wynosi $U_0\sqrt{C/L} = 0{,}15$ A.

Rozważmy teraz przebieg zmian zachodzących w obwodzie z diodą. Natychmiast po zamknięciu klucza napięcie na diodzie miało kierunek zaporowy o wartości 3 V, a napięcie na kondensatorze i natężenie prądu były równe zeru. Po upływie ćwierci okresu (0,0628 s) napięcie na kondensatorze zrównało się z napięciem źródła, napięcie na zwojnicy i diodzie spadło do zera, a prąd płynący przez zwojnicę osiągnął wartość maksymalną. Dalej natężenie prądu zaczęło maleć, napięcie na kondensatorze nadal wzrastało, a napięcie na zwojnicy zmieniło znak (przybrało kierunek przewodzenia diody). Gdy faza drgań osiągnęła wartość

$$\varphi = \arcsin(1/3) = 0{,}340$$

(co odpowiada 0,0541 okresu, czyli 0,0136 s), dioda zaczęła świecić. Natężenie prądu płynącego przez zwojnicę miało wtedy wartość

$$(0{,}15\ \mathrm{A}) \cdot \cos\varphi = 0{,}1414\ \mathrm{A}.$$

Dopóki dioda przewodziła, wszystkie napięcia utrzymywały stałe wartości, a natężenie prądu płynącego przez zwojnicę i diodę malało w stałym tempie równym

$$\mathrm{d}I/\mathrm{d}t = 1\ \mathrm{V}/L = 1{,}25\ \mathrm{A/s}$$

(przez źródło i kondensator prąd wtedy nie płynął). Po czasie wynoszącym

$$0{,}1414/1{,}25 = 0{,}1131\ \mathrm{s}$$

natężenie prądu spadło do zera, a dalszy wzrost natężenia prądu w kierunku przeciwnym odbywał się „kosztem” rozładowania kondensatora (dioda była od tej chwili zablokowana). Drgania w obwodzie nie wygasły, ale ich amplituda była tak mała, że dioda już nie zaświeciła. Z dokładnością do 0,001 s, dioda zaświeciła po upływie 0,076 s i świeciła przez 0,113 s.