Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2004

UWAGA!

ZMIANA ADRESU DO KORESPONDENCJI!

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań **465** ($WT = 2{,}20$) i **466** ($WT = 1{,}38$) z numeru 9/2003

Paweł Najman	– Jaworzno	43,99
Andrzej Jóźwik	– Kielce	40,64
Paweł Kubit	– Kraków	38,72
Piotr Kumor	– Olsztyn	38,22
Zbigniew Sewartowski	– Wieliczka	36,07

Zadania z matematyki nr 481, 482

Redaguje Marcin E. KUCZMA

481. Niech S_p oznacza symetrię płaszczyzny względem prostej p. Scharakteryzować te trójki różnych prostych (k, ℓ, m), dla których złożenie $f = S_m \circ S_\ell \circ S_k$ jest tym samym przekształceniem, co złożenie $g = S_k \circ S_m \circ S_\ell$.

482. Dana jest liczba naturalna $n > 1$. Liczba dodatnia a jest pierwiastkiem wielomianu $x^n - x - 1$; liczba dodatnia b jest pierwiastkiem wielomianu $x^{2n} - x - 3a$. Rozstrzygnąć, w zależności od n, która z liczb a, b jest większa.

Zadanie 482 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

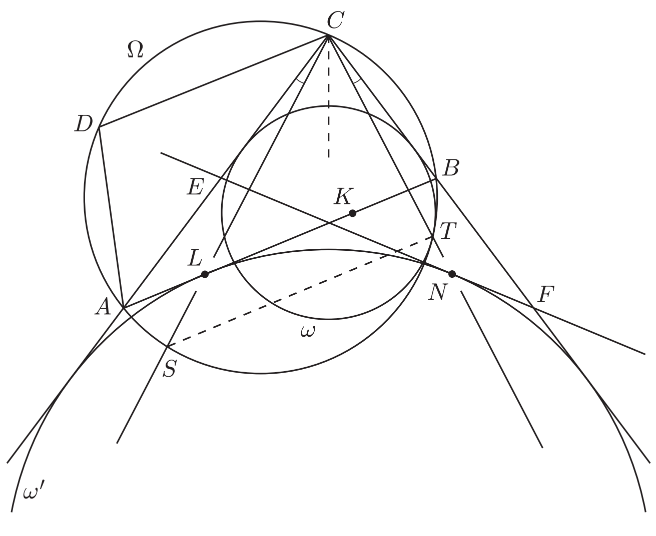
Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/2004

Przypominamy treść zadań:

473. Trapez $ABCD$ o równoległych podstawach AB, CD jest wpisany w okrąg Ω. Okrąg ω, styczny wewnętrznie do Ω w punkcie T, jest też styczny do odcinków BC i CA. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku AB w punkcie K. Dowieść, że punkty D, K, T są współliniowe.

474. Dla jakich dodatnich liczb całkowitych n równanie
$$\frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+1} + \frac{z^2}{z+1} = n$$
ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z?

473. Niech TS będzie cięciwą okręgu Ω, równoległą do AB i CD.



Z równości łuków AS i BT wynika równość kątów ACS i BCT. Okrąg ω' dopisany do trójkąta CAB, styczny do przedłużeń boków CA i CB, jest styczny do boku AB w takim punkcie L, że $|AL| = |BK|$. Symetralna cięciw AB, CD, ST jest osią symetrii, w której punktom D, K, T odpowiadają punkty C, L, S. Wystarczy udowodnić, że te ostatnie trzy punkty są współliniowe.

Na półprostych $CA^{\rightarrow}$ i $CB^{\rightarrow}$ odkładamy odcinki CE i CF o długościach $|CE| = |CB|$, $|CF| = |CA|$. Trójkąt CFE jest obrazem trójkąta CAB w symetrii, której osią jest dwusieczna kąta BCA; oba trójkąty mają wspólny okrąg dopisany ω'. Obrazem punktu L w tej symetrii jest N – punkt styczności okręgu ω' z bokiem EF; z równości $|\sphericalangle ACS| = |\sphericalangle BCT|$ wynika zaś, że obrazem półprostej $CS^{\rightarrow}$ jest półprosta $CT^{\rightarrow}$. Teza sprowadza się do wykazania, że punkty C, N, T są współliniowe.

Inwersja o środku C i promieniu $r = \sqrt{|CA| \cdot |CB|}$ przeprowadza punkty A i B odpowiednio na E i F, okrąg Ω na prostą EF, a okrąg ω – na okrąg styczny do prostych CE, CF, EF, położony po przeciwnej stronie prostej EF, niż punkt C – czyli na okrąg ω'. Punkt styczności okręgów Ω i ω (czyli T) przechodzi na punkt styczności prostej EF i okręgu ω' (czyli N). Półprosta $CT^{\rightarrow}$ jest w tej inwersji swoim własnym obrazem. Uzyskujemy współliniowość punktów C, N, T, do której dowodu zostało wcześniej sprowadzone zadanie.

474. Z równości
$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$
wynika, że jeśli liczby całkowite dodatnie n, x, y, z spełniają podane równanie, to
$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = n + 3 - (x+y+z).$$

Prawa strona jest liczbą całkowitą. Lewa strona jest liczbą dodatnią, niewiększą niż $\frac{3}{2}$. Musi więc to być liczba 1. Istnieją trzy przedstawienia jedynki jako sumy ułamków egipskich: $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$. Zatem trójka (x, y, z) jest, z dokładnością do permutacji, jedną z trzech trójek: $(2,2,2)$, $(1,3,3)$, $(1,2,5)$. Wartości n wynoszą, odpowiednio, 4, 5, 6 i są to jedyne wartości n, spełniające postawiony warunek.

Zadania z fizyki nr 378, 379

Redaguje Jerzy B. BROJAN

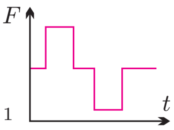
378. Człowiek stoi w windzie na wadze sprężynowej. Kiedy winda przejechała jedno piętro w górę, wskazania wagi zmieniały się według wykresu 1. Ile pięter przejedzie winda, jeśli przebieg wskazań wagi będzie opisany wykresem 2?

379. Pewna cienka soczewka ma w powietrzu ogniskową $f = 30$ cm, a w wodzie (współczynnik załamania $n_1 = 1{,}33$) – ogniskową $f_1 = 100$ cm.
a) Ile wynosi ogniskowa tej soczewki w oleju o współczynniku załamania $n_2 = 1{,}45$?
b) Czy otrzymany wynik jest poprawny również wtedy, gdy soczewka jest w rzeczywistości zestawem sklejonych soczewek?

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2004

UWAGA!

ZMIANA ADRESU DO KORESPONDENCJI!



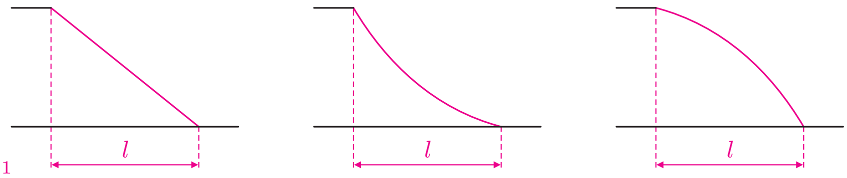
Wykres 1

Wykres 2

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/2004

Przypominamy treść zadań:

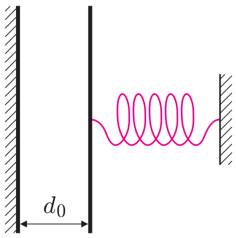
370. Górka ma jedno zbocze będące równią pochyłą, drugie zbocze jest wklęsłe, a trzecie – wypukłe (rys. 1), przy czym zarówno wysokość zboczy, jak i długość rzutu na płaszczyznę poziomą są jednakowe.



Rys. 1

Dyzio zjechał sankami ze zbocza prostoliniowego i narzeka: „Marny dzisiaj śnieg, nawet na samym dole nie można się porządnie rozpędzić!”. Czy Dyzio rozpędzi się bardziej, gdy zjedzie z innego zbocza, a jeśli tak, to z którego? Współczynnik tarcia sanek o śnieg jest wszędzie taki sam, a opór powietrza pomijamy. Zabronione jest odpychanie się od podłoża.

371. Dwie równoległe płytki przewodzące o powierzchni S tworzą kondensator powietrzny. Jedna z płytek jest nieruchoma, a drugą przymocowano do sprężynki o stałej sprężystości k, przy czym dla sprężynki swobodnej odległość między płytkami jest równa d_0 (rys. 2). Jakie jest maksymalne napięcie, które można przyłożyć do takiego kondensatora, aby płytki się nie zetknęły? Jaką maksymalną energię może zmagazynować taki układ? Napięcie wzrasta stopniowo, tak że płytka nie zostanie wprawiona w drgania.



Rys. 2

370. Podzielmy pochylnię na małe odcinki, a analizę ruchu sanek przeprowadźmy na razie bez uwzględniania roli siły odśrodkowej. Wtedy przyspieszenie sanek będzie takie, jak dla równi pochyłej, tzn.

$$a = \mathrm{g}(\sin\alpha - f\cos\alpha),$$

gdzie α jest kątem nachylenia danego odcinka do poziomu, a f – współczynnikiem tarcia. Według wzorów opisujących ruch przyspieszony prędkość uzyskana w wyniku zjazdu z równi o długości $\mathrm{d}l$, wysokości $\mathrm{d}h$ i długości rzutu na płaszczyznę poziomą $\mathrm{d}s$ wynosi

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2a\mathrm{d}l},$$

a po podstawieniu a

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\mathrm{g}(\mathrm{d}h - f\mathrm{d}s)},$$

gdzie v_0 jest prędkością początkową. Dodając przyrosty wielkości v^2 na poszczególnych odcinkach i podstawiając prędkość na początku zjazdu równą zeru wyznaczamy prędkość końcową

$$v_k = \sqrt{2\mathrm{g}(h - fs)}.$$

Zgodnie z treścią zadania tak obliczona prędkość końcowa nie zależałaby od wyboru zbocza. O ostatecznej odpowiedzi decyduje zatem pominięty wpływ działania siły odśrodkowej. Oczywiste jest, że dla pochylni wklęsłej siła ta dociska sanki do podłoża i – wskutek tarcia – hamuje je, a dla pochylni wypukłej efekt jest odwrotny. Dyzio rozpędzi się silniej po zjechaniu z wypukłego zbocza.

371. Jeśli odległość między płytkami wyniesie d, to natężenie pola elektrycznego między nimi stanie się równe

$$E = U/d,$$

ładunek na płytkach

$$Q = \varepsilon_0 ES = \varepsilon_0 US/d,$$

a siła ich wzajemnego przyciągania

$$F = \frac{1}{2}QE = \frac{1}{2}\varepsilon_0 S\left(\frac{U}{d}\right)^2$$

(czynnik $\frac{1}{2}$ wynika stąd, że natężenie pola jednej płytki jest równe $\frac{E}{2}$). W stanie równowagi tę siłę należy przyrównać do siły sprężystości, czyli do $k(d_0 - d)$. Otrzymaliśmy równanie trzeciego stopnia, a graficznie mamy do czynienia z punktem przecięcia wykresów funkcji

$$y = A/x^2 \quad \text{i} \quad y = B - Cx.$$

Maksymalna wartość A, dla której istnieje rozwiązanie dodatnie, odpowiada sytuacji, kiedy oba wykresy są styczne. Przyrównując pochodne znajdujemy

$$A_{\max} = \frac{4B^3}{27C^2},$$

a po niezbędnych podstawieniach otrzymujemy maksymalną wartość napięcia

$$U_{\max} = \left(\frac{k}{\varepsilon_0 S}\right)^{1/2}\left(\frac{2d_0}{3}\right)^{3/2}.$$

Odnotujmy, że gdy U osiąga wartość maksymalną, odległość płytek d staje się równa $\frac{2}{3}d_0$. Energia układu składa się z energii kondensatora $E_k = \frac{1}{2}CU^2$ oraz energii sprężystości $E_s = \frac{1}{2}k(d - d_0)^2$. Łatwo sprawdzić, że maksymalna wartość każdego ze składników występuje wtedy, gdy napięcie jest maksymalne. Przekształcając wyrażenia dochodzimy do wyniku

$$E_{\max} = \frac{5}{18}kd_0^2.$$