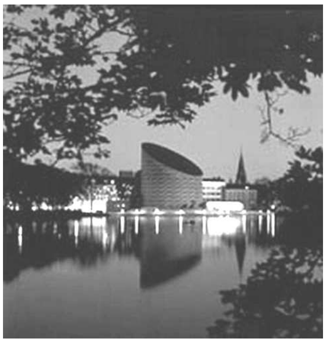
Planetarium w Kopenhadze

Mogens NISS, Dania

Zaprojektowane przez duńskiego architekta, Knuda Munka, Planetarium Kopenhaskie ma kształt, który matematycy określiliby jako prosty walec kołowy ścięty ukośną płaszczyzną.

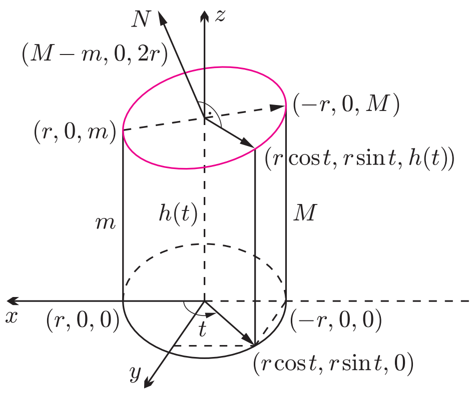


Planetarium im. Tychona Brahego w Kopenhadze.

Pewnego dnia moja żona, również architekt, spytała mnie, jak można najłatwiej zbudować kartonowy model takiego budynku. Dzięki powszechnie używanym programom projektowym typu CAD (*computer aided-design*) można z łatwością zobaczyć obraz budynku na ekranie lub papierze, lecz zazwyczaj nie dają one żadnych wskazówek, jaką krzywą należy narysować na płaskim (i miękkim) kartonie, by po jego rozcięciu wzdłuż tej krzywej i zwinięciu powstał żądany kształt.

Chcę tu wyjaśnić, jak można odpowiedzieć na pytanie mojej żony.

Przyjmijmy, że otrzymany walec (rys. 1) ma promień podstawy równy r, natomiast m jest odległością między najniższym punktem ukośnego, płaskiego dachu i płaszczyzną podstawy. Niech ponadto M oznacza odległość najwyższego punktu dachu od tej płaszczyzny.



Rys. 1

W celu matematycznego opisu sytuacji wprowadźmy trójwymiarowy układ współrzędnych w sposób następujący. Walec umieszczamy na płaszczyźnie xy, tak aby jego oś stanowiła trzecią oś układu, czyli oś Oz, a środek podstawy był tego układu początkiem. Co więcej, zróbmy to tak, by zarówno najniższy, jak i najwyższy punkt dachu leżały w płaszczyźnie xz i miały współrzędne $(r, 0, m)$ i $(-r, 0, M)$, odpowiednio. Takie położenie walca w układzie współrzędnych ma wiele wygodnych konsekwencji.

Pierwszą z nich jest to, że $(-r, 0, M) - (r, 0, m) = (-2r, 0, M-m)$ jest w płaszczyźnie xz wektorem równoległym do dachu, podczas gdy $(M-m, 0, 2r)$ jest (w tej samej płaszczyźnie xz) wektorem normalnym do dachu. Ponadto punkt przecięcia osi Oz z dachem, S, ma współrzędne $(0, 0, \frac{m+M}{2})$.

Punkt $P(t)$ na krzywej wspólnej dla walca i dachu można opisać parametrycznie w postaci $(r\cos t, r\sin t, h(t))$ dla $t \in [0, 2\pi)$. Funkcja h jest właśnie poszukiwaną funkcją, gdyż jej wykres wyznacza cięcie kartonu przed jego zwinięciem.

Aby znaleźć tę funkcję h, zażądamy, by wektor z S do $P(t)$ był prostopadły do wektora normalnego, o którym mowa wyżej. Inaczej mówiąc, h ma być funkcją taką, że iloczyn skalarny tych dwóch wektorów pozostaje stale równy 0 w przedziale $[0, 2\pi)$:

$$\left(r\cos t, r\sin t, h(t) - \frac{m+M}{2}\right) \cdot (M-m, 0, 2r) = 0$$

dla wszystkich $t \in [0, 2\pi)$. Po wymnożeniu otrzymujemy równanie

$$(M-m)r\cos t + 2rh(t) - r(m+M) = 0,$$

gdzie $t \in [0, 2\pi)$, z którego wnosimy, że

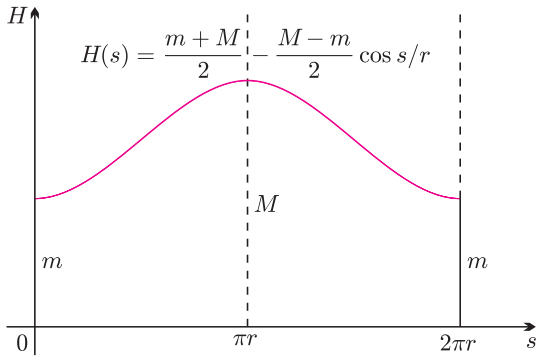
$$h(t) = \frac{m+M}{2} - \frac{M-m}{2}\cos t \quad \text{dla } t \in [0, 2\pi).$$

Zauważmy jednak, że gdy przyjdzie rysować krzywą cięcia na kartonie, łatwiej będzie odwoływać się do długości s odcinka na powierzchni bocznej walca niż do kąta obrotu. Z równości $s = rt$ otrzymujemy funkcję, której wykres powinniśmy narysować na kartonie:

$$H(s) = h(s/r) = \frac{m+M}{2} - \frac{M-m}{2}\cos s/r$$

dla $s \in [0, 2\pi r)$.

Tak wygląda odpowiedź na początkowe pytanie. Wynik widać na rysunku 2.



Rys. 2

Warto dodać, że brzeg dachu jest zawsze elipsą. Do wykazania tego faktu wystarczy rozważyć dowolny punkt $P(t)$ tej krzywej na płaszczyźnie dachu w układzie współrzędnych, w którym S jest początkiem, prosta łącząca najniższy i najwyższy punkt dachu jest pierwszą osią, a prosta normalna przechodząca przez S – drugą osią.

Tłumaczył Wiktor BARTOL