Kolorowanie parkietaży

Mateusz KWAŚNICKI

Spotkałem następujące zadanie: znaleźć wielościan o 2003 ścianach, spośród których 1001 pomalowanych jest na biało, a 1002 na czarno w ten sposób, że żadna krawędź nie oddziela dwóch ścian czarnych. Zadanie nietrudne, lecz w trakcie jego rozwiązywania przyszło mi do głowy pewne uogólnienie.

Niech v, e, f oznaczają odpowiednio liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian wielościanu. Liczbę ścian białych oznaczmy przez k, czarnych – przez l. Niech m krawędzi rozdziela białe ściany, a n krawędzi oddziela białe od czarnych. Ze wzoru Eulera

$$v + f = 2 + e.$$

Ponadto

$$f = k + l; \qquad e = m + n;$$

wreszcie każdy wierzchołek należy do co najmniej:

(i) dwóch ścian czarnych,

(ii) jednej ściany czarnej i jednej krawędzi rozdzielającej białe ściany lub

(iii) trzech krawędzi rozdzielających białe ściany.

Mamy więc

$$v \leqslant \frac{1}{2}(2m + n).$$

Stąd

$$m + \frac{1}{2}n + k + l \geqslant 2 + m + n,$$

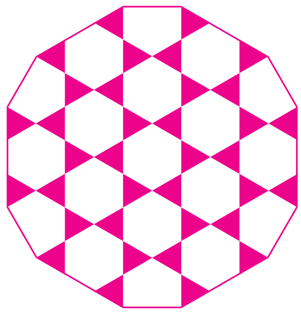
czyli

$$l \geqslant 2 + \frac{1}{2}n - k.$$

Każda czarna ściana ma co najmniej trzy krawędzie, więc $n \geqslant 3k$. Ostatecznie zatem

$$(*) \qquad l \geqslant 2 + \frac{1}{2}k\,.$$

Rozważmy powierzchnię, która widziana z góry przypomina sześciokątny fragment parkietażu sześciokątno-trójkątnego o „średnicy” $2p + 1$ sześciokątów, z narożnymi sześciokątami przyciętymi do pięciokątów.

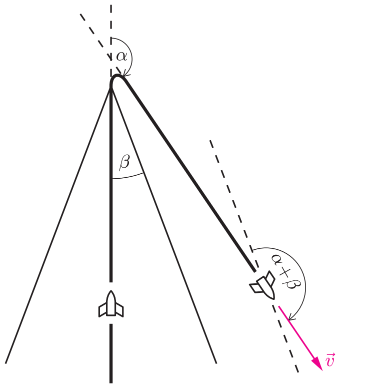


(Przypomina, ponieważ powierzchnia o dokładnie takim rzucie nie istnieje, żadne dwie krawędzie na brzegu nie mogą być współliniowe; ponadto zakładamy, że brzeg takiego rzutu jest foremnym $12p$-kątem.) Składając dwie takie powierzchnie skręcone względem siebie, otrzymamy bryłę, dla której:

$$\frac{1}{2}k = 6p(p+1), \qquad \frac{1}{2}l = 1 + 3p(p+1),$$

co pokazuje, że oszacowanie $(*)$ jest wynikiem najlepszym z możliwych. Można zatem powiedzieć, że teza początkowego zadania jest stosunkowo słaba. Okazuje się, że ścian czarnych może być nie tylko więcej, lecz prawie dwa razy więcej niż białych.

Rozwiązanie zadania F 621.
Kąt, pod jakim rozchodzi się fala uderzeniowa w stosunku do kierunku ruchu, dany jest przez $\sin\beta = c/v$. Po zakręcie składowa prędkości samolotu równoległa do kierunku rozchodzenia się fali uderzeniowej, wytworzonej przed zakrętem, równa jest $v' = \sin(\alpha+\beta)v$.



Aby własna fala uderzeniowa doścignęła samolot, musi zajść

$$v' < c$$

– inaczej fala nie dogoni samolotu, oraz

$$\alpha + \beta > 90^\circ$$

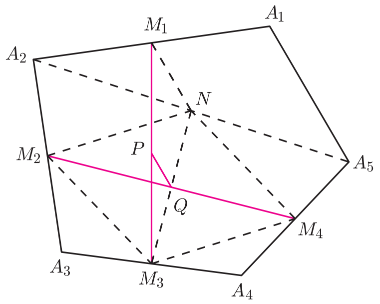
– inaczej samolot nie znajdzie się na „drodze” swojej fali uderzeniowej.

Wobec tego

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(180^\circ - \alpha - \beta) = \frac{c}{v} = \sin\beta,$$

a ponieważ $180^\circ - \alpha - \beta < 90^\circ$, to implikuje $\alpha > 180^\circ - 2\beta$.

Rozwiązanie zadania M 1064.
Niech N będzie środkiem odcinka A_2A_5.



Wówczas czworokąt $NM_2M_3M_4$ jest równoległobokiem, gdyż każdy jego bok jest równoległy do prostej A_2A_4 lub prostej A_3A_5. Zatem punkt Q – jako środek przekątnej M_2M_4 – jest również środkiem odcinka NM_3. Stąd wynika, że odcinki PQ i NM_1 są równoległe oraz $PQ = \frac{1}{2}NM_1$. Ponadto odcinki NM_1 i A_1A_5 są równoległe oraz zachodzi równość $NM_1 = \frac{1}{2}A_1A_5$. W efekcie proste PQ i A_1A_5 są równoległe oraz $PQ = \frac{1}{4}A_1A_5$.