Problem Malfattiego

Jarosław GÓRNICKI, Dariusz PANEK

Geometria elementarna nie stwarza dzisiaj szerokiego pola dla oryginalnej twórczości. Wciąż jednak istnieją proste w sformułowaniach problemy geometryczne, które nie doczekały się rozwiązania. Jeden z nich został postawiony w 1803 roku przez włoskiego geometrę (profesora matematyki na uniwersytecie w Ferrarze) Gian Francesco Malfattiego (1731–1807). Malfatti chciał wyciąć z graniastosłupa o trójkątnej podstawie trzy cylindryczne kolumny o możliwie największej objętości. Problem ten możemy wyrazić następująco.

Problem Malfattiego. *W trójkąt wpisać trzy koła (o rozłącznych wnętrzach), których łączna powierzchnia jest możliwie największa.*

Hipnoza

Malfatti nie tylko postawił problem, lecz również pokazał, jak widzi jego rozwiązanie. Rozwiązanie problemu – według Malfattiego – wskazują trzy okręgi, z których każdy jest styczny do dwóch pozostałych i jednocześnie do dwóch boków trójkąta (będziemy je nazywać okręgami Malfattiego). Malfatti podał nawet algebraiczne warunki takiej sytuacji. Zwrócił jednocześnie uwagę na problem wskazania możliwie prostej realizacji takiej konstrukcji środkami klasycznymi (przy użyciu cyrkla i linijki). Zagadnienie to cieszyło się dużym zainteresowaniem wśród ówczesnych sympatyków geometrii. Dzisiaj znamy je jako zadanie Malfattiego.

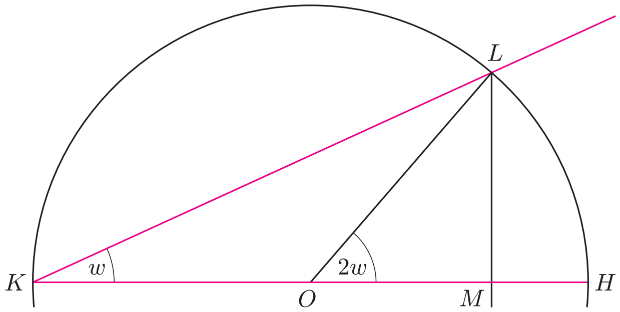
Zadanie Malfattiego. *W trójkąt wpisać trzy okręgi styczne do siebie i do boków danego trójkąta.*

Specjalny przypadek tego zadania (gdy trójkąt jest równoboczny) rozważał już Jakob Bernoulli (1654–1705) przed 1704 r. Rozwiązanie zadania Malfattiego środkami klasycznymi (proszę spróbować to zrobić!) interesowało nie tylko amatorów, będących entuzjastami elementarnej geometrii, lecz również matematyków tej miary co J. Steiner (1796–1863) czy A. Cayley (1821–1895), [9]. Pierwsze, dogodne do realizacji, konstrukcyjne rozwiązanie zadania Malfattiego wskazał dopiero w 1819 roku C.L. Lehmus (1780–1863). W 1826 r. J. Steiner podał (bez uzasadnienia), że uogólnienie zadania Malfattiego (wykreślić trzy okręgi styczne do siebie, z których każdy jest styczny do dwóch prostych wyznaczonych przez boki danego trójkąta) może mieć aż 32 rozwiązania, [6].

Prezentację elementarnego rozwiązania zadania Malfattiego (według pomysłu C.H. Schellbacha (1809–1892), [1]) rozpoczniemy od następujących obserwacji:

- *Jeśli mamy dany kąt ostry w, to możemy wykreślić odcinek długości $m = \sin^2 w$.*
- *Jeśli dany jest odcinek o długości $0 < m < 1$, to możemy wykreślić kąt w, dla którego $m = \sin^2 w$.*

Kreślimy półokrąg oparty na średnicy KH o długości równej 1. Na boku KH odkładamy kąt w tak, że drugie ramię kąta przecina półokrąg w punkcie L. Z punktu L kreślimy prostopadłą do średnicy KH. Punkt ich przecięcia oznaczamy przez M (rys. 1).



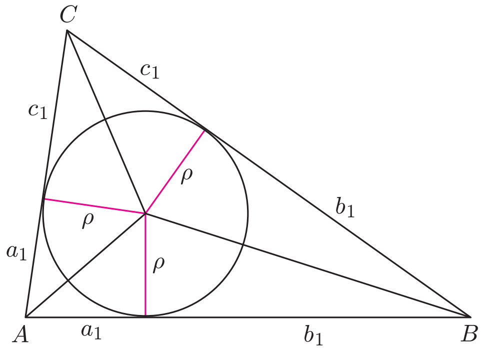
Rys. 1

Wówczas

$$|MH| = |OH| - |OM| = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2w = \sin^2 w = m.$$

Postępując w odwrotnej kolejności, dla danego odcinka HM możemy wyznaczyć „odpowiadający” mu kąt w.

- *Dla okręgu o promieniu ρ, wpisanego w trójkąt ABC o bokach długości a, b, c $(a+b+c=2s)$, w którym odległości od punktów styczności do wierzchołków trójkąta wynoszą odpowiednio a_1, b_1, c_1,* (rys. 2)*, ma miejsce zależność $\rho^2 = \frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1}{s}$.*



Rys. 2

Z układu trzech równań

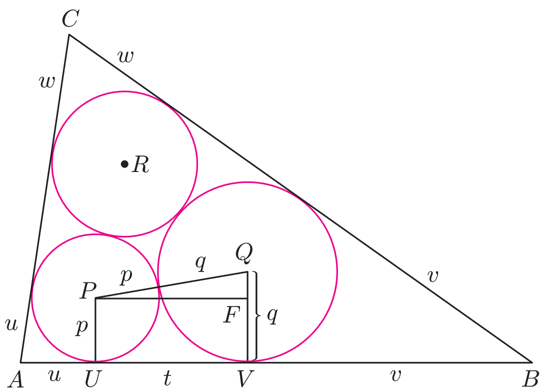
$$\begin{cases} b_1 + c_1 = a, \\ c_1 + a_1 = b, \\ a_1 + b_1 = c, \end{cases}$$

wyznaczamy wartości $a_1 = s - a$, $b_1 = s - b$, $c_1 = s - c$. Uwzględniając teraz zależność $\rho = \frac{|\triangle ABC|}{s}$ i korzystając ze wzoru Herona, mamy

$$\rho = \frac{|\triangle ABC|}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \sqrt{\frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1}{s}}.$$

Nasze dalsze postępowanie jest następujące: Przyjmujemy, że połowa obwodu danego trójkąta jest równa 1. Wykreślamy trzy kąty λ, μ, ν, których sinusy podniesione do kwadratu są równe długościom kolejnych boków danego trójkąta. Tworzymy kąt $\sigma = \frac{1}{2}(\lambda + \mu + \nu)$ oraz trzy nowe kąty $\psi = \sigma - \lambda$, $\phi = \sigma - \mu$, $\chi = \sigma - \nu$. Wówczas wartości $\sin^2\psi$, $\sin^2\phi$, $\sin^2\chi$ są długościami odcinków łączących wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgów Malfattiego z bokami trójkąta. Pozwala to już wskazać środki i promienie okręgów Malfattiego.

Uzasadnienie poprawności tej konstrukcji jest następujące. Rozważmy trójkąt ABC o bokach długości $a,\ b,\ c$ $(a+b+c=2s)$ i kątach $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, którego okręgi Malfattiego (styczne do ramion kątów $\alpha,\ \beta,\ \gamma$) mają środki w punktach $P,\ Q,\ R$, i których promienie mają długości $p,\ q,\ r$. Niech długości stycznych z wierzchołków $A,\ B,\ C$ do punktów styczności z okręgami Malfattiego wynoszą odpowiednio $u,\ v,\ w$ (rys. 3).



Rys. 3

Ponieważ punkt P, jak i środek okręgu wpisanego (o promieniu ρ) leżą na dwusiecznej kąta α, więc $\frac{p}{\rho}=\frac{u}{a_1}$, skąd $p=\frac{\rho}{a_1}\cdot u$. Podobnie $q=\frac{\rho}{b_1}\cdot v$. Rozważając trójkąt prostokątny PFQ i wykorzystując zależność $\rho^2=\frac{a_1\cdot b_1\cdot c_1}{s}$, bez trudu znajdujemy długość odcinka

$$|UV|=t=2\sqrt{p\cdot q}=2\sqrt{u\cdot v}\sqrt{\frac{\rho^2}{a_1\cdot b_1}}=2\sqrt{\frac{c_1}{s}}\sqrt{u\cdot v}.$$

Korzystając z przyjętego założenia $(s=1)$, porównując wielkości składające się na długość boku AB, dostajemy równanie

$$u+v+2\sqrt{c_1}\sqrt{u\cdot v}=c.$$

Podobne postępowanie w przypadku pozostałych dwóch boków trójkąta pozwala na otrzymanie następującego układu równań

$$(*)\qquad \begin{cases} v+w+2\sqrt{a_1}\sqrt{v\cdot w}=a,\\ w+u+2\sqrt{b_1}\sqrt{w\cdot u}=b,\\ u+v+2\sqrt{c_1}\sqrt{u\cdot v}=c.\end{cases}$$

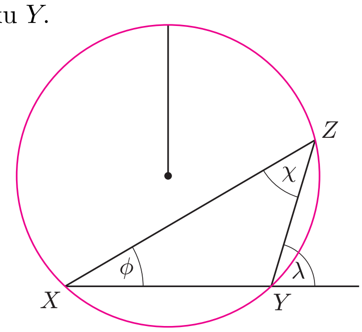
Potraktujmy teraz wielkości $a,\ b,\ c,\ u,\ v,\ w$ jako kwadraty sinusów sześciu ostrych kątów $\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \psi,\ \phi,\ \chi$:

$$\begin{array}{ll} \sin^2\lambda=a, & \sin^2\psi=u,\\ \sin^2\mu=b, & \sin^2\phi=v,\\ \sin^2\nu=c, & \sin^2\chi=w.\end{array}$$

Wówczas (dzięki zależnościom $a+a_1=s=1$, $b+b_1=1$, $c+c_1=1$) mamy $\cos^{\lambda}=a_1$, $\cos^2\mu=b_1$, $\cos^2\nu=c_1$. To zaś pozwala zapisać układ równań $(*)$ w postaci:

$$(**)\quad \begin{cases} \sin^2\phi+\sin^2\chi+2\sin\phi\cdot\sin\chi\cdot\cos\lambda=\sin^2\lambda,\\ \sin^2\chi+\sin^2\psi+2\sin\chi\cdot\sin\psi\cdot\cos\mu=\sin^2\mu,\\ \sin^2\psi+\sin^2\phi+2\sin\psi\cdot\sin\phi\cdot\cos\nu=\sin^2\nu.\end{cases}$$

Przypatrzmy się pierwszemu równaniu. Stosując twierdzenie sinusów do trójkąta XYZ o kątach ostrych $|\sphericalangle ZXY|=\phi$, $|\sphericalangle XZY|=\chi$, wpisanego w okrąg o średnicy 1 (rys. 4) widzimy, że boki tego trójkąta mają długości $|YZ|=\sin\phi$, $|XY|=\sin\chi$, $|XZ|=\sin\lambda$, gdzie λ jest miarą zaznaczonego kąta zewnętrznego przy wierzchołku Y.



Rys. 4

Zastosowanie do tego trójkąta twierdzenia cosinusów daje pierwsze równanie. Oznacza to, że pierwsza zależność trygonometryczna z układu $(**)$ wyraża równość $\phi+\chi=\lambda$. Zatem z układu $(**)$ otrzymujemy: $\phi+\chi=\lambda$, $\chi+\psi=\mu$, $\psi+\phi=\nu$, a stąd $\psi=\sigma-\lambda$, $\phi=\sigma-\mu$, $\chi=\sigma-\nu$, gdzie $\sigma=\frac{1}{2}(\lambda+\mu+\nu)$. Oznacza to, że wyżej opisana konstrukcja wskazuje rozwiązanie zadania Malfattiego.

Promienie okręgów Malfattiego można też wyrazić jak w [9]:

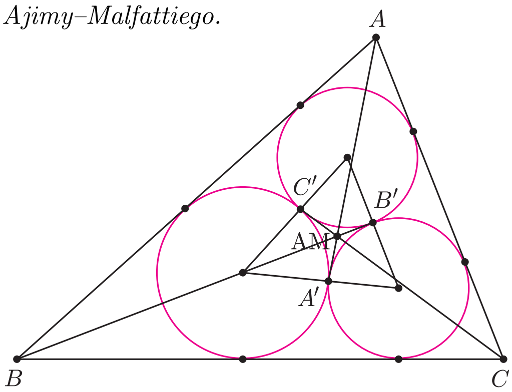
$$r_1=\ \frac{\rho}{2n}(s+e-rho-f-g),$$
$$r_2=\ \frac{\rho}{2k}(s+f-\rho-e-g),$$
$$r_3=\ \frac{\rho}{2m}(s+g-\rho-e-f),$$

gdzie ρ oznacza promień okręgu wpisanego w trójkąt, s jest połową długości obwodu trójkąta, $e,\ f,\ g$ są odległościami wierzchołków trójkąta od środka okręgu wpisanego w ten trójkąt; $n,\ k,\ m$ są odległościami wierzchołków trójkąta od punktów styczności okręgu weń wpisanego.

Wariacje na temat... zadania

Opisane właśnie zadanie pojawiło się również (i to wcześniej) w dość niezwykłych okolicznościach, w innej kulturze – w XVII wiecznej Japonii. W okresie *Edo* [od nazwy ośrodka władzy, dzisiaj Tokyo] (przypadającym na lata 1600–1868) szogun Tokugawa Iemitsu, aby wzmocnić swoją władzę, proklamował w 1639 roku oficjalną izolację Japonii. Zakazano wówczas czytania obcojęzycznych książek, odbywania podróży poza granice kraju, wprowadzono obowiązek rejestrowania się wszystkich Japończyków w świątyniach buddyjskich, zabroniono wstępu do japońskich portów hiszpańskim oraz portugalskim statkom (ograniczony handel prowadzono jedynie z Holendrami, Chińczykami i Koreańczykami). Wiele z tych ograniczeń przetrwało do 1853 r., gdy komandor Matthew C. Perry wpływając do zatoki Uraga (koło Jokohamy) eskadrą amerykańskiej floty wojennej, przerwał trwającą izolację. Właśnie na czas izolacji przypada znakomity rozwój sztuki i kultury japońskiej (będący odpowiednikiem europejskiego renesansu). W tym czasie rozwija się również matematyka, w której dominującą pozycję mają metody rachunkowe. Na terenie Japonii pojawiają się drewniane „tabliczki matematyczne” z kolorowymi rysunkami geometrycznymi zwane *san gaku*. Wydaje się, że były one ogólnie przyjętym aktem oddawania czci opiekuńczym bóstwom. Większość tabliczek *san gaku* (do dzisiaj odnaleziono ich ponad 880, najstarszą z 1683 r. w prefekturze Tochigi) przedstawia różnorodne zadania geometryczne. Lektura książki [3], prezentującej treść blisko 250 takich tabliczek (zob. też [5], [8]), pokazuje, jak ważną w nich rolę odgrywają okręgi, elipsy, wielokąty, sfery. Większość san gaku prezentuje elementarne zadania (zazwyczaj bez rozwiązań). Pojawiają się również tabliczki z zadaniami trudnymi. Na przykład Chokuyen Ajima z Yedo (1732–1798) pracował nad zadaniem: *w trójkąt wpisać trzy okręgi tak, by każdy był styczny do dwóch pozostałych* (to nic innego jak zadanie Malfattiego). Ajima zawarł rozwiązanie w manuskryptach z lat 1771–1773. Zgodnie z ówczesnymi zwyczajami jego rozwiązanie jest liczbowym przykładem: dla trójkąta, którego boki mają długości $a = 507$, $b = 375$, $c = 252$, średnice wpisanych okręgów wynoszą $2r_1 = 128$, $2r_2 = 112{,}5$, $2r_3 = 72$. Przyjaciel Ajimy, Teisi Fujita (1734–1807) postawił w 1781 roku następujące zadanie [3, Prob. 2.3]: *Trzy okręgi* $O_1(r_1)$, $O_2(r_2,)$ $O_3(r_3)$ *są styczne zewnętrznie każdy z każdym. Trójkąt* ABC *tworzą wspólne styczne do tych okręgów. Wyznaczyć promień okręgu wpisanego w ten trójkąt w zależności od* $r_1,\ r_2,\ r_3$. Zadanie to znajduje się również na tabliczce san gaku z 1865 r., którą znaleziono w prefekturze Gifu. Jak widać, potrzeba rozważań geometrycznych jest niezależna od cywilizacyjnego kręgu!

Problemy dotyczące trójkątów często dają możliwość uzupełnienia bogatej listy *punktów szczególnych trójkąta* (tak nazywamy punkty, które są wyznaczone przez większą liczbę warunków, niż jest to niezbędne). Na przykład, jeżeli punkty styczności okręgów Malfattiego, A', B', C', połączymy z odpowiadającymi im przeciwległymi wierzchołkami (rys. 5), to odcinki AA', BB', CC' przetną się w jednym punkcie zwanym *punktem Ajimy–Malfattiego.*

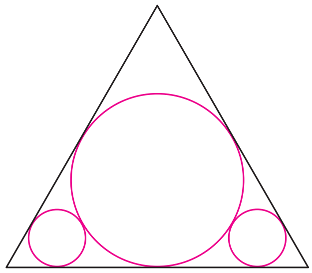


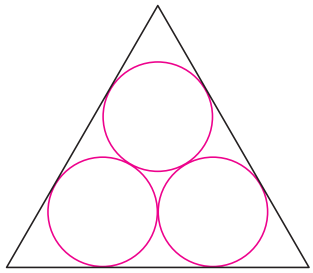
Rys. 5

O innych punktach szczególnych trójkąta, pojawiających się w kontekście zadania Malfattiego, można przeczytać w internecie: `www.cedar.evansville.edu`; `www.mathworld.wolfram.com`.

Przebudzenie..., czyli wciąż mamy problem

Trudno uwierzyć, ale dopiero po blisko 130 latach (!!) (w roku 1929) H. Lob i H.W. Richmond [6] zauważyli, że okręgi Malfattiego nie muszą wskazywać rozwiązania problemu Malfattiego! Na przykład dla trójkąta równobocznego koła z rysunku 6 mają łączną powierzchnię większą niż koła Malfattiego z rysunku 7.


Rys. 6

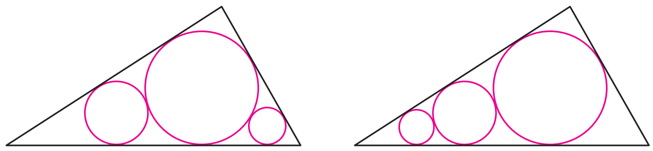

Rys. 7

W 1965 roku H. Evans [2] „wzmocnił” to przypuszczenie zauważając, że dla trójkątów „długich i cienkich” łączna powierzchnia trzech kół wpisanych w trójkąt tak jak na rysunku 8 jest niemal dwukrotnie większa od klasycznego „rozwiązania” Malfattiego z rysunku 9.


Rys. 8


Rys. 9

W 1967 r. M. Goldberg [4] wyjaśnił rzecz ostatecznie: konfiguracja okręgów Malfattiego nigdy nie jest rozwiązaniem problemu Malfattiego! Jak zatem wygląda rozwiązanie problemu Malfattiego? Niestety, tego nie wiemy! Wydaje się, że rozwiązań problemu Malfattiego należy upatrywać w konfiguracjach przedstawionych na rysunkach 6 i 8. Jednak dowodu tego przypuszczenia nie ma. Pomostem łączącym te propozycje jest trójkąt prostokątny o kącie ostrym, równym w przybliżeniu 30,7° (wielkość tę wyznaczamy rozwiązując stosowne równanie trygonometryczne), w którym obie konfiguracje kół mają takie same powierzchnie (rys. 10.).


Rys. 10

LITERATURA

1. H. Dörrie, *100 great problems of elementary mathematics: their history and solutions*, N. York (1965), 147–151.
2. H. Eves, *A survey of geometry*, Allyn & Bacon, Boston, MA (1965), 245.
3. H. Fukagawa, D. Pedoe, *Japanese temple geometry problems (San Gaku)*, The Charles Babbage Research Center, Winnipeg (1989).
4. M. Goldberg, *On the original Malfatti problem*, Math. Mag. 40 (1967), 241–247.
5. E. Jagoda, D. Panek, *Przykłady japońskich problemów geometrycznych*, Matematyka 1 (2002), 4–10.
6. H. Lob, H. Richmond, *On the solution of Malfatti's problem for a triangle*, Proc. London Math. Soc. 2 (1930), 287–304.
7. C.S. Ogilvy, *Excursions in geometry*, Oxford Univ. Press, N. York (1969), 145–147.
8.T. Rothman, H. Fukagawa, *Japońska geometria świątynna*, Świat Nauki 7/1998, 63–69.
9.A. Wittstein, *Geschichte des Malfatti'schen Problems*, München (1871).