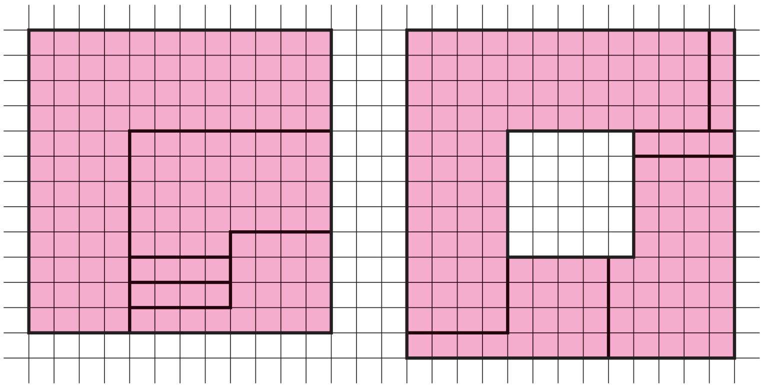
mała delta

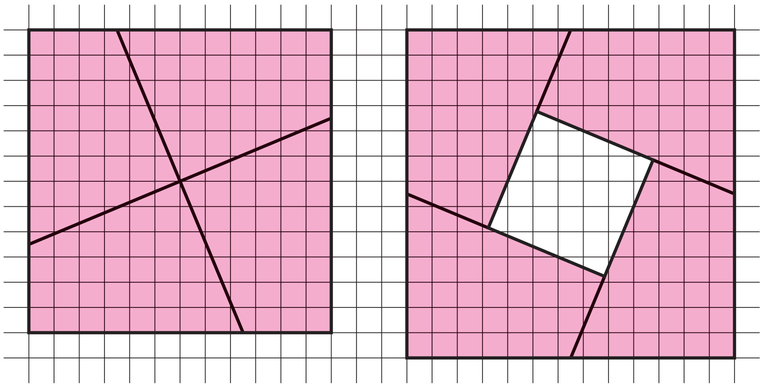
Jeszcze o kwadratach i nożyczkach

W *Delcie* 12/2004 proponowałem, aby tak podzielić kwadrat o boku 12, by z uzyskanych części **ułożyć** kwadrat o boku 13 z wyciętym **w środku** kwadratem o boku 5. Przytoczyłem też opinię, że – podobno – części tych może być cztery, choć sam umiałem przeprowadzić podział, o jakim mowa, na sześć takich części (co prawda na kilka sposobów).

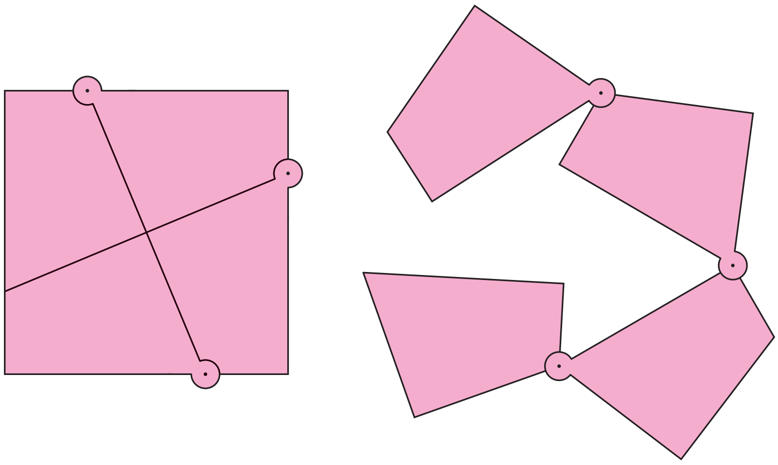
A potem przyjrzałem się temu zadaniu dokładniej i zobaczyłem, że sformułowanie dopuszcza kilka różnych interpretacji. Po pierwsze, czy słowo **ułożyć** pozwala odwracać części na lewą stronę? Jeśli by tak było, to znam podział na 5 części.

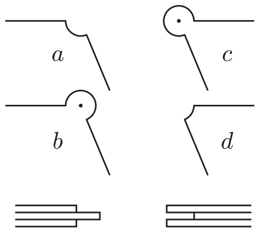


Po drugie, czy warunek, że kwadrat o boku 5 wycinamy **w środku**, zawiera żądanie, aby wycinany kwadrat miał nie tylko ten sam środek, co ten, z którego go wycinamy, czy też jeszcze ich boki mają być równoległe? Jeśli równoległości być nie musi, to podział na cztery części jest możliwy.



Można to nawet zrealizować w postaci zabawki, wykonując kwadrat np. ze sklejki i wyposażając go w trzy zawiaski, np. tak, jak na rysunku z prawej. Aby otrzymać akurat rozwiązanie naszego zadania, trzeba boki kwadratu 12×12 podzielić w stosunku $7 : 17$ (czemu?).





Zawiaski można zrobić w ten sposób, że przy kącie rozwartym ułożymy warstwy *aba*, natomiast przy ostrym *cdc*, i połączymy pionowym drucikiem przez zaznaczony punkt.

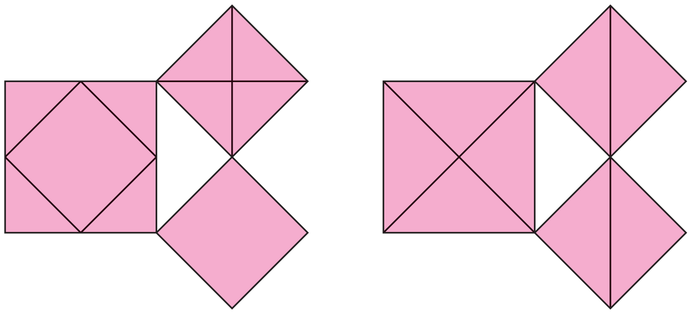
Bo warto zauważyć, że jeśli dowolnie przetniemy kwadrat dwiema prostopadłymi przechodzącymi przez jego środek, to z otrzymanych czterech części zawsze da się ułożyć (i to tak „zawiaskowo”) kwadrat z kwadratowym otworem (no, ewentualnie bez otworu).

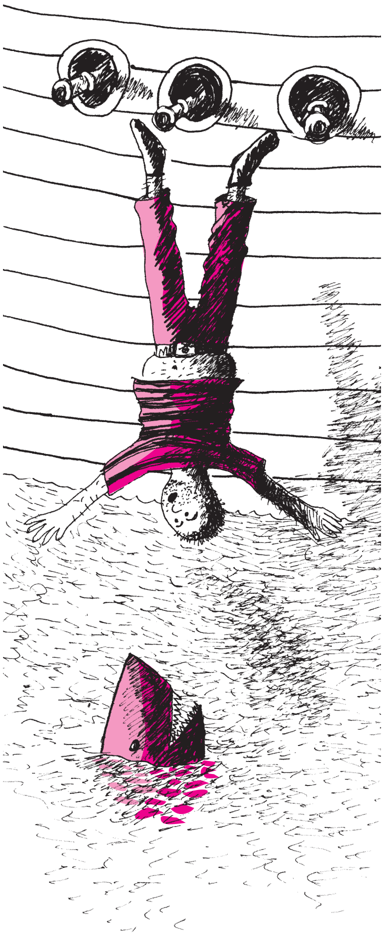
W tym momencie orientujemy się, że problem dawno już nie dotyczy kratkowanego papieru ani trójek pitagorejskich. Rozwiązaliśmy zadanie polegające na rozkładzie kwadratu na dwa kwadraty, co dokładniej można opisać tak.

Dane są takie dwie liczby a i b, że $a > b > 0$. Podzielić kwadrat o boku a na pięć wielokątnych części, z których da się ułożyć dwa kwadraty: jeden o boku b, drugi o boku $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Rzeczywiście rozwiązaliśmy, bo z poprzedniego obrazka widać, że stosowne części to – w przypadku, gdy $b > c$ – kwadrat o boku c i cztery jednakowe czworokąty, których boki mają kolejno długości $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$, $\frac{b+c}{2}$, $\frac{b-c}{2}$ i kąty proste między pierwszym i drugim oraz trzecim i czwartym bokiem. Jeśli ktoś nie wierzy, niech szczegółowo to przeliczy. W przypadku gdy $b < c$, trzeba zamienić miejscami b i c, czyli wziąć kwadrat o boku b itd.

W pominiętym przypadku $b = c$ otrzymamy kwadrat i cztery trójkąty. Widać jednak, że tutaj można dokonać podziału również na cztery tylko części.





Powstaje, oczywiście, pytanie, czy przypadkiem (zmieniając sposób dzielenia na wielokąty) nie da się, dla dowolnych a i b, podzielić kwadratu o boku a na cztery wielokąty, z których da się ułożyć kwadraty o boku b i c.

Nie znam odpowiedzi na to pytanie, choć znam wybitnych matematyków, którzy wierzą, że odpowiedź jest negatywna (czyli istnieją liczby a i b, dla których nie można przeprowadzić żądanego podziału na cztery części). Wierzą do tego stopnia, iż są pewni, że taki dowód gdzieś został opublikowany. Póki się jednak nie odnajdzie – może Czytelnicy *Delty* pomogą?

Marek KORDOS