Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
28 II 2006

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
499 ($WT = 1{,}02$) i **500** ($WT = 3{,}12$)
z numeru 4/2005

Jerzy Cisło	– Wrocław	48,04
Zbigniew Sewartowski	– Wieliczka	43,95
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	40,93
Marian Kasperski	– Warszawa	36,86

Jerzy Cisło swoją czwartą czterdziestoczterpunktówkę kończy w świetnym stylu – efektownym rozwiązaniem zadania 500: znaleźć *jak najmniejszą* liczbę itd.; wyznaczył **minimalną**.

Zapraszamy do lektury omówienia sezonu Ligi w numerze 2/2006.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 511, 512

Redaguje Marcin E. KUCZMA

511. Okręgi k_1, k_2, k_3 (na płaszczyźnie) przecinają się parami:

$$k_2 \cap k_3 = \{K, X\}, \qquad k_3 \cap k_1 = \{L, Y\}, \qquad k_1 \cap k_2 = \{M, Z\}.$$

Środek każdego okręgu leży na zewnątrz dwóch pozostałych okręgów. Ponadto istnieje okrąg przechodzący przez punkty K, L, M oraz środki okręgów k_i. Udowodnić, że jeśli K, L, M są trzema różnymi punktami, to punkty X, Y, Z pokrywają się.

512. Dana jest liczba całkowita dodatnia n. Wykazać, że równanie

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{n}$$

ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych x, y wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n jest podzielna przez sześcian liczby całkowitej większej od 1.

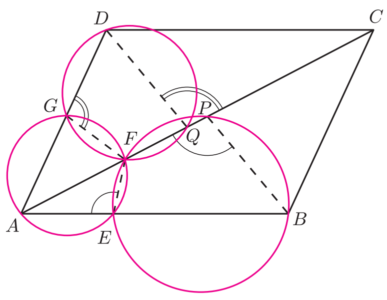
Zadanie 512 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
28 II 2006

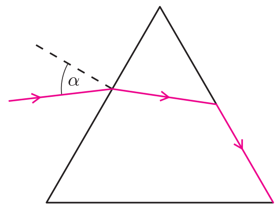
Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
400 ($WT = 2{,}90$) i **401** ($WT = 3{,}00$)
z numeru 6/2005

Jerzy Witkowski	– Radlin	41,14
Marian Łupieżowiec	– Gliwice	30,22
Mateusz Łącki	– Kraków	28,77
Konrad Kapcia	– Częstochowa	25,19
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	17,43
Tomasz Tkocz	– Rybnik	17,37



Zadania z fizyki nr 408, 409

Redaguje Jerzy B. BROJAN



408. Przez pryzmat, którego przekrój ma kształt trójkąta równobocznego, biegnie promień światła, wybiegając z niego stycznie do ścianki (rys.). Ile wynosi współczynnik załamania szkła, jeśli kąt α wynosi $35°$?

409. Ciężar o masie $m = 10\,\mathrm{kg}$ wisi na dwóch cienkich i jednakowo obciążonych drutach o długości $l = 20\,\mathrm{m}$, które początkowo były pionowe i odległe od siebie o $d = 20\,\mathrm{cm}$. Przez druty przepuszczono prąd o jednakowym natężeniu i zwrocie. Przy jakim natężeniu prądu druty się zetkną? Dopuszczalne są przybliżenia odpowiednie dla podanych wartości liczbowych oraz obliczenia numeryczne.

Rozwiązanie zadania M 1117.

Liczbę $111\ldots1\,222\ldots2$ (n jedynek i n dwójek) można zapisać jako:

$$\frac{1}{9}(10^n - 1)\cdot 10^n + \frac{2}{9}(10^n - 1) = \left(\frac{10^n - 1}{3}\right)\cdot\left(\frac{10^n + 2}{3}\right).$$

Pozostaje zauważyć, że oba czynniki po prawej stronie to liczby naturalne różniące się o 1.

Rozwiązanie zadania M 1119.

Na przekątnej AC wybierzmy takie punkty P i Q, aby

$$(*) \qquad \sphericalangle APB = \sphericalangle AEF = \alpha \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CQD = \sphericalangle DGF = \beta\,.$$

Ponieważ na czworokącie $AEFG$ można opisać okrąg, więc $\alpha = \beta$, skąd wynika, że proste BP i DQ są równoległe. Stąd $AQ = CP$. Ponadto z równości $(*)$ wnioskujemy, że punkty B, E, F, P, jak również punkty D, G, F, Q, leżą na jednym okręgu. Zatem

$$AB\cdot AE + AD\cdot AG = AP\cdot AF + AQ\cdot AF = (AP + CP)\cdot AF = AC\cdot AF\,.$$