O kulkach w pudełkach

Zacznijmy od następującego zadania:

Na ile sposobów można rozmieścić 14 *identycznych przedmiotów (np. kulek) w* 3 *pudełkach tak, by w żadnym z pudełek nie znalazło się więcej niż* 7 *przedmiotów?*

Jego rozwiązanie nie powinno nam przysporzyć większych trudności. Możemy po prostu wypisać wszystkie sposoby. Oto niektóre z nich:

I	II	III
0	7	7
1	6	7
2	5	7
2	6	6
3	4	7
3	5	6
4	4	6
4	5	5

Pozostałe możliwości są permutacjami powyższych. Łatwo policzyć, że wszystkich jest 36.

Ta metoda może okazać się nieco mniej przyjemna, gdy zechcemy zastosować ją do analogicznego zadania, ale z większą liczbą przedmiotów i pudełek. Warto zatem zastanowić się nad innym rozwiązaniem.

Na początek policzmy wszystkie sposoby rozmieszczenia 14 przedmiotów w trzech pudełkach. Jeżeli w pierwszym pudełku znajdzie się m przedmiotów, wówczas drugie pudełko możemy wypełnić na $15 - m$ sposobów. Liczba przedmiotów w trzecim pudełku będzie wyznaczona jednoznacznie przez ich liczbę w pierwszym oraz drugim. Wszystkich sposobów jest zatem

$$\sum_{m=0}^{14} (15 - m) = 120.$$

Następnie zauważmy, że więcej niż 7 przedmiotów może znajdować się w dokładnie jednym pudełku. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że w pierwszym. Musi się w nim znaleźć co najmniej 8 przedmiotów, wystarczy więc policzyć sposoby rozdzielenia pozostałych 6 do 3 pudełek. Licząc tak, jak poprzednio, otrzymamy

$$\sum_{m=0}^{6} (7 - m) = 28.$$

Teraz już widać, że sposobów spełniających wszystkie nasze warunki jest $120 - 3 \times 28 = 36$.

Możemy teraz zastanowić się nad problemem bardziej ogólnym:

Na ile sposobów możemy rozmieścić n jednakowych przedmiotów w k pudełkach?

Najpierw rozpatrzmy przypadek $n = 6$ oraz $k = 4$. Niech przedmioty będą reprezentowane zerami; wypiszmy je jedno za drugim – tak, jakbyśmy kładli po kolei te przedmioty. Teraz między wypisane zera wstawmy trzy jedynki; pokażą one, w którym miejscu zmieniamy pudełko, a więc służą do rozdzielenia przedmiotów do czterech pudełek. Może się zdarzyć, że dwie jedynki stoją koło siebie – to znaczy, że któreś pudełko będzie puste. Nietrudno zauważyć, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między ciągami złożonymi z sześciu zer i trzech jedynek a sposobami rozmieszczenia tych sześciu zer w czterech pudełkach. Mianowicie, dany ciąg odpowiada umieszczeniu wszystkich zer występujących przed pierwszą jedynką w pierwszym pudełku, w drugim pudełku zer, które leżą między pierwszą a drugą jedynką, w trzecim pudełku zer, które leżą między drugą a trzecią jedynką, i zer występujących po ostatniej jedynce w pudełku czwartym. Na przykład

$$0\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0 \to 0\,|\,0\,|\,0\,0\,0\,|\,0 \to \boxed{0}\boxed{0}\boxed{0\,0\,0}\boxed{0}$$

Wystarczy teraz tylko policzyć, ile jest ciągów mających dokładnie sześć zer i trzy jedynki. Aby wyznaczyć taki ciąg, wystarczy wskazać miejsca, na których stoją jedynki. Na przykład w poniższym ciągu jedynka występuje na miejscu pierwszym, trzecim i szóstym.

$$1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0$$

Takich ciągów będzie zatem tyle, ile jest sposobów na wybranie 3 miejsc (w których postawimy jedynki) spośród 9 dostępnych, czyli $\binom{9}{3}$.
W przypadku ogólnym rozpatrujemy ciągi złożone z n zer i $k-1$ jedynek; będzie ich $\binom{n+k-1}{k-1}$ i, tak jak poprzednio, istnieje odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna między tymi ciągami a rozmieszczeniami n zer w k pudełkach.

Ta metoda okazuje się mieć zastosowanie nie tylko do zadań o kulkach w pudełkach; jest ona daleko bogatsza i nieraz bardzo przydatna. Rozważmy na przykład problem taki:

Ile jest rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k = n$$

w liczbach całkowitych nieujemnych?

Spróbujmy podać interpretację rozwiązań powyższego równania. Szukamy tak naprawdę sposobów rozdzielenia zbioru n-elementowego na k części. Dlatego można powiedzieć, że rozwiązania te są algebraicznym opisem sposobów rozmieszczenia n przedmiotów w k pudełkach.

Na tym jednak nie kończą się zastosowania tej zasady. Wiele jest problemów, przede wszystkim kombinatorycznych, które można rozwiązać przez zliczenie rozmieszczeń n przedmiotów w k pudełkach. Jako ćwiczenie polecam zadanie:

Ile jest liczb między 0 *a* 999, *których suma cyfr jest równa* 20*?*

Małą Deltę przygotował Dariusz ZAWISZA