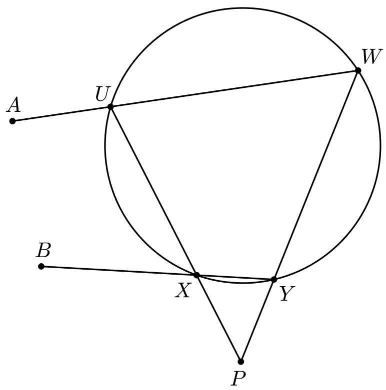


Dwadzieścia lat później

W numerze 1/1982 rozpoczęliśmy serię *Zadań, których nie umiemy rozwiązać* następującym:
Dany jest okrąg o i trzy punkty A, B i P. Narysować proste przez A i B wyznaczające na okręgu takie cięciwy UW i XY, żeby proste UX i WY przecinały się w punkcie P.

Po upływie prawie pół roku otrzymaliśmy rozwiązanie od naszego Czytelnika, Karola Kamińskiego (wówczas ucznia V klasy Technikum Mechanicznego w Piotrkowie Trybunalskim) zawierające opis konstrukcji (samą linijką!), ale bez dowodu poprawności. Nasz Czytelnik na nasze monity odpisał, że tak wychodzi i już. Musieliśmy sami przeprowadzić ten dowód, co się w końcu udało i zamieściliśmy go wraz z konstrukcją w numerze 1/1983.

Dziś, po ponad 20 latach, przedstawiamy nowe, zupełnie inne rozwiązanie tego problemu. Znalazł je Michał Jastrzębski z XIV LO w Warszawie. Jak widać, uczniowie przez te 20 lat nic nie stracili ze swoich talentów.

Redakcja

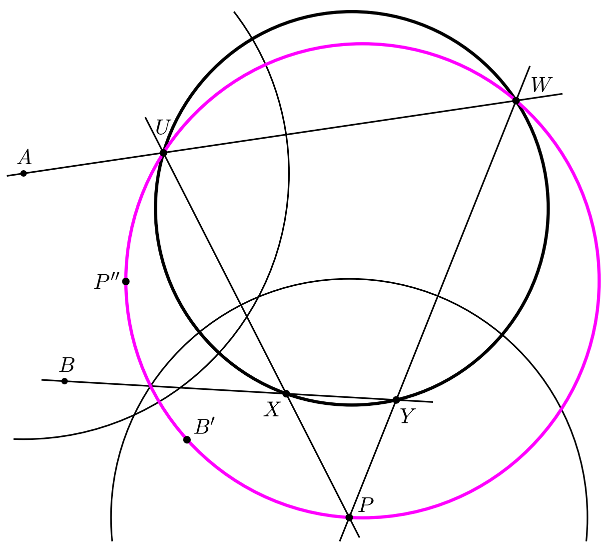
⋆ ⋆ ⋆

Powyższe zadanie rozwiązałem w następujący sposób.

Rozpatrzmy najpierw przypadek, w którym zarówno A, jak i P leżą na zewnątrz okręgu o. Załóżmy, że dane mamy punkty: U, W, X, Y, spełniające warunki zadania. Rozważmy inwersję I_P o środku w punkcie P względem okręgu prostopadłego do o, czyli taką w której okrąg o pozostanie stały. W inwersji tej obraz punktu Q będziemy oznaczać przez Q'. Wówczas $W = Y'$ oraz $U = X'$. Niech l będzie prostą przechodzącą przez punkty: X, Y, B. Jej obrazem w inwersji I_P będzie okrąg l' przechodzący przez punkty: X', Y', B' oraz P (jako środek inwersji). Oznacza to, że okrąg l' przechodzi przez punkty: U, W, B' oraz P.

Punkt A leży na prostej UW, a tym samym na osi potęgowej okręgów o i l'. Rozważmy teraz inwersję I_A o środku w punkcie A zachowującą okrąg o. W inwersji tej obraz punktu Q oznaczać będziemy przez Q''. Ponieważ A ma równe potęgi względem o i l', więc inwersja I_A zachowa również okrąg l'. Tym samym, ponieważ $P \in l'$, więc również $P'' \in l'$. Ostatecznie widzimy, że okrąg l' przechodzi przez punkty P, B' oraz P'', które jednoznacznie go wyznaczają. Na okręgu tym leżą również punkty U i W.

Konstrukcję szukanych punktów możemy więc przeprowadzić w następujący sposób. Konstruujemy punkty B' oraz P'', a następnie opisujemy na trójkącie $PB'P''$ okrąg. Punkty przecięcia tego okręgu z okręgiem o będą punktami U i W. Znając punkty U i W, bez problemu znajdujemy brakujące punkty X i Y. Dowód poprawności konstrukcji przeprowadzamy, rozumując w drugą stronę.



Podana konstrukcja „nie zadziała", jeżeli punkt P lub punkt A leży wewnątrz okręgu o. Rzeczywiście, jeżeli np. punkt P leży wewnątrz okręgu o, to nie istnieje inwersja o środku w punkcie P, zachowująca okrąg o. W takim przypadku rozpatrujemy przekształcenie

$$H_P = S_P \circ I_P,$$

będące złożeniem inwersji o środku w punkcie P i promieniu równym pierwiastkowi z wartości bezwzględnej potęgi punktu P względem okręgu o, z symetrią środkową względem punktu P. Przekształcenie to zachowuje okrąg o. Analogicznie, jeżeli punkt A leży wewnątrz okręgu o, zamiast inwersji I_A będziemy rozpatrywać przekształcenie

$$H_A = S_A \circ I_A.$$

Przy przekształceniu H_P prosta nieprzechodząca przez punkt P przejdzie na okrąg przechodzący przez P. W szczególności, prosta XYB przejdzie na okrąg l' przechodzący przez punkty: U, W, P, B', gdzie przez Q' oznaczamy obraz punktu Q w przekształceniu H_P. Jeśli teraz punkt A leży na zewnątrz okręgu o, to przeprowadzamy takie rozumowanie, jak na początku rozwiązania. W przeciwnym przypadku rozpatrujemy przekształcenie H_A zachowujące okrąg o. Ponieważ punkt P leży na osi potęgowej okręgu o i okręgu l', więc H_A zachowuje również okrąg l'. Dalszą część rozumowania prowadzimy tak, jak w pierwszym przypadku.

Michał JASTRZĘBSKI