O pewnym równaniu diofantycznym

Maria Chiara BRAMBILLA [*]

Równania diofantyczne są jednymi z bardziej interesujących zagadnień teorii liczb. Przypomnijmy, że *równaniem diofantycznym* nazywamy równanie algebraiczne, na ogół wielu zmiennych, z całkowitymi współczynnikami. Przez rozwiązanie takiego równania rozumiemy znalezienie wszystkich układów liczb całkowitych, które to równanie spełniają. Nazwa „równanie diofantyczne" pochodzi od imienia Diofantosa z Aleksandrii (prawdopodobnie III w.), którego główne dzieło *„Arithmetica"* zawierało m.in. tego typu zagadnienia.

Rozwiązanie równania diofantycznego na ogół nie jest łatwe, a często wymaga wręcz bardzo zaawansowanych narzędzi matematycznych. Koronnym przykładem jest tu Wielkie Twierdzenie Fermata, które dotyczy równania diofantycznego

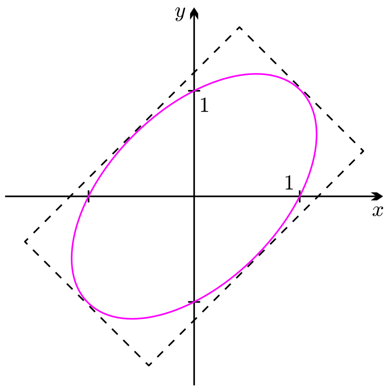
$$x^n + y^n = z^n.$$

Jako ciekawostkę warto dodać, że Fermat zanotował je właśnie na marginesie swojego egzemplarza dzieła Diofantosa.

W tym artykule zajmiemy się rozwiązaniem następującego równania diofantycznego stopnia 2 dwóch zmiennych:

$$x^2 - Nxy + y^2 = 1, \tag{$*$}$$

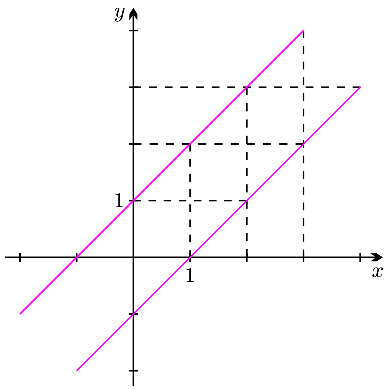
gdzie N jest ustaloną liczbą całkowitą. Zatem naszym zadaniem jest znalezienie wszystkich par liczb całkowitych (x, y), dla których zachodzi powyższa równość. Zauważmy, że możemy założyć, że $N \geqslant 0$, gdyż jeśli $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ jest rozwiązaniem $(*)$ dla $N = \widetilde{N}$ to $(\widetilde{x}, -\widetilde{y})$ jest rozwiązaniem $(*)$ dla $N = -\widetilde{N}$. Na początek przeanalizujmy przypadki specjalne $N = 0$, $N = 1$ i $N = 2$.



Rys. 1

- Jeżeli $N = 0$, to nasze równanie przybiera postać $x^2 + y^2 = 1$. Rozwiązania rzeczywiste tego równania reprezentowane są na płaszczyźnie kartezjańskiej przez okrąg o środku w $(0, 0)$ i promieniu 1. Jest jasne, że jedynymi punktami o współrzędnych całkowitych na tym okręgu są punkty $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ i $(0, -1)$.
- Gdy $N = 1$, rozwiązania równania w liczbach rzeczywistych tworzą elipsę (rys. 1). Z postaci równania $(*)$ wynika, że proste $y = x$ i $y = -x$ są jej osiami symetrii. Punkty przecięcia tych prostych z elipsą to punkty
$$(1,1), \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad (-1,-1), \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$
Zatem cała elipsa zawarta jest w prostokącie wyznaczonym przez proste
$$y = -x + 2,$$
$$y = x - \frac{2\sqrt{3}}{3},$$
$$y = -x - 2,$$
$$y = x + \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Przez bezpośrednie sprawdzenie wszystkich punktów o obu współrzędnych całkowitych z tego prostokąta dostajemy sześć rozwiązań naszego równania: $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$,$(-1, 0)$, $(-1, -1)$, $(0, -1)$.



Rys. 2

- Dla $N = 2$ nasze równanie przybiera postać
$$(x - y)^2 = 1 \iff (x - y - 1)(x - y + 1) = 0,$$
więc rozwiązania rzeczywiste można zilustrować dwiema prostymi (rys. 2). W tym przypadku, rozwiązania całkowite $(*)$ odpowiadają punktom o obu współrzędnych całkowitych na prostych $y = x - 1$ i $y = x + 1$. Jest ich nieskończenie wiele i możemy podać ich ogólną postać: $(x, y) = (n, n - 1)$ lub $(x, y) = (n, n + 1)$ dla $n \in \mathbb{Z}$.

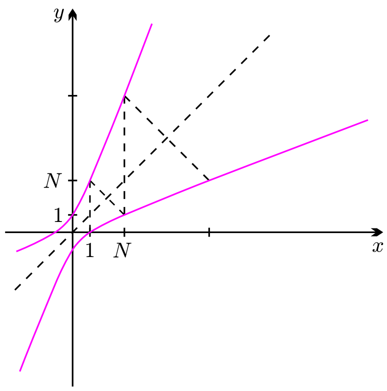
[*] Uniwersytet we Florencji, Włochy

Rozważmy teraz przypadek $N \geqslant 3$. Rozwiązania rzeczywiste równania $(*)$ tworzą hiperbolę. Ponieważ jest nieograniczona, stwierdzenie, które jej punkty mają obie współrzędne całkowite nie jest natychmiastowe. Oczywiście nasza hiperbola też jest symetryczna względem prostych $y = x$ oraz $y = -x$. Wiemy zatem, że jeśli $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ jest rozwiązaniem $(*)$, to każda z par $(\widetilde{y}, \widetilde{x})$, $(-\widetilde{x}, -\widetilde{y})$, $(-\widetilde{y}, -\widetilde{x})$ też nim jest. Użyjemy tej symetrii, by skonstruować ciąg rozwiązań. Dla $x = 1$ równanie $(*)$ ma dwa rozwiązania: $y = 0$ lub $y = N$. Z symetrii względem prostej $y = x$ dostajemy kolejne rozwiązanie $(N, 1)$. Jest to punkt przecięcia hiperboli z prostą $x = N$. Okazuje się, że drugi punkt przecięcia też daje rozwiązanie. Ogólnie, przyjmijmy, że punkt (x_0, y_0) o obu współrzędnych całkowitych należy do hiperboli. Niech prosta $x = x_0$ przecina ponadto naszą hiperbolę w punkcie (x_0, y_1). Oznacza to, że zarówno y_0 jak i y_1 są pierwiastkami równania

$$y^2 - Nx_0 y + x_0^2 - 1 = 0.$$

Ze wzorów Viete'a dostajemy równość $y_0 + y_1 = Nx_0$, a to pozwala stwierdzić, że y_1 też jest liczbą całkowitą. Wykorzystując tę obserwację, z pary (x_0, y_0) dostajemy ciąg rozwiązań naszego równania (rys. 3):

$$(x_0, y_0) \to (x_0, Nx_0 - y_0) \to (Nx_0 - y_0, x_0) \to$$
$$\to (Nx_0 - y_0, N(Nx_0 - y_0) - x_0) \to \ldots$$



Rys. 3

Rozpoczynając tę procedurę od punktu $(1, 0)$, otrzymane rozwiązania możemy zgrabnie zapisać za pomocą następującego wzoru rekurencyjnego:

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 1, \\ a_{k+1} = Na_k - a_{k-1}. \end{cases}$$

W tym przypadku wszystkie skonstruowane pary są postaci (a_k, a_{k+1}) oraz (a_{k+1}, a_k). Oczywiście $(-a_k, -a_{k+1})$ i $(-a_{k+1}, -a_k)$ też są rozwiązaniami $(*)$.

Przyjrzyjmy się teraz ciągowi (a_k). Zastosujemy standardową procedurę znajdowania bezpośredniego wzoru na a_k. Polega ona na poszukiwaniu najpierw takich ciągów (b_k) spełniających zależność $b_{k+1} = Nb_k - b_{k-1}$, które są postaci $b_k = z^k$ dla pewnego $z \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Z zależności rekurencyjnej wynika, że z spełnia równanie $z^2 - Nz + 1 = 0$, które ma dwa pierwiastki:

$$\alpha = \frac{N + \sqrt{N^2 - 4}}{2} \quad \text{oraz} \quad \beta = \frac{N - \sqrt{N^2 - 4}}{2}.$$

Dla dowolnych $u, v \in \mathbb{R}$ ciąg $c_k = u\alpha^k + v\beta^k$ także spełnia podaną wyżej zależność rekurencyjną. Dodając dodatkowe warunki $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, otrzymujemy

$$u = \frac{1}{\sqrt{N^2 - 4}} \quad \text{oraz} \quad v = -\frac{1}{\sqrt{N^2 - 4}}.$$

Zatem ciągi (a_k) i (c_k) są takie same, a ich k-ty wyraz ma postać:

$$a_k = \frac{\left(\frac{N + \sqrt{N^2-4}}{2}\right)^k - \left(\frac{N - \sqrt{N^2-4}}{2}\right)^k}{\sqrt{N^2 - 4}}.$$

Gdy $N = 3$ to wszystkie wyrazy w ciągu $(a_k) = (0, 1, 3, 8, 21, 55, \ldots)$ są liczbami Fibonacciego. Przypomnijmy, że ciąg Fibonacciego jest zdefiniowany rekurencyjnie

$$\begin{cases} f_0 = 0, \\ f_1 = 1, \\ f_{k+1} = f_k + f_{k-1}. \end{cases}$$

Nazwa liczb Fibonacciego pochodzi od Leonarda z Pizy, syna (*filius*) Bonacciego, którego książka „Liber abaci" (1202) przyczyniła się do rozpropagowania w Europie osiągnięć arabskiej i hinduskiej arytmetyki. Liczby Fibonacciego mają wiele zaskakujących własności i pojawiają się w matematyce (ale także i w przyrodzie) w nieoczekiwany sposób. Na przykład, ciąg ilorazów kolejnych liczb Fibonacciego, to jest $\frac{f_{k+1}}{f_k}$ jest zbieżny do złotej liczby $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Powróćmy jednak do badania ciągu (a_k). Dwie kolejne jego własności są następujące.

- Ciąg kolejnych ilorazów $d_k = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ $(k \geqslant 1)$ jest malejący i zbieżny do $\frac{N + \sqrt{N^2-4}}{2}$.
- Dla $k \geqslant 1$ zachodzi $a_k^2 - a_{k+1}a_{k-1} = 1$.

Rozwiązanie zadania F 678.
Niech siła niwelująca unoszenie się górnej kulki będzie równa F, a jej objętość V. Suma wszystkich sił działających na ciało poruszające się ze stałą prędkością wynosi zero. Zatem do zerwania nici

$$(\rho + \rho_x - 2\rho_0)Vg = 2F,$$

a po jej zerwaniu

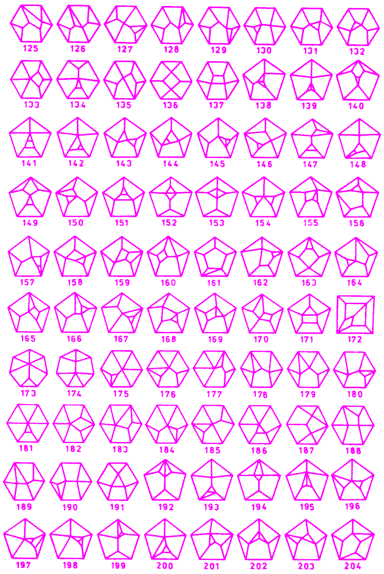
$$(\rho_0 - \rho_x)Vg = F.$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\rho + \rho_x - 2\rho_0 = 2\rho_0 - 2\rho_x,$$

stąd

$$\rho_x = \frac{4\rho_0 - \rho}{3} = 400\ \text{kg/m}^3.$$



wielościany ośmiościenne (ciąg dalszy)

W szczególności a_k i a_{k-1} są względnie pierwsze. Powyższe fakty łatwo jest udowodnić za pomocą indukcji matematycznej. Używając tej metody, można też sprawdzić to, co już wiemy, a mianowicie, że pary (a_{k+1}, a_k) są rozwiązaniami równania $(*)$. Pokażemy teraz (na trzy sposoby), że przy założeniu $x \geqslant y \geqslant 0$ każde rozwiązanie jest tej postaci.

Pierwszy dowód będzie geometryczny – znów popatrzymy na wcześniej rozważaną hiperbolę. Przypuśćmy, że (x_0, y_0) jest punktem o obu współrzędnych całkowitych nieujemnych na jej dolnej gałęzi. Z symetrii wiemy, że (y_0, x_0) też leży na tej hiperboli, ale na górnej gałęzi. Prosta $x = y_0$ wyznacza nowe rozwiązanie całkowite $(y_0, Ny_0 - x_0)$. Innymi słowy, odwracamy po prostu opisaną wcześniej procedurę konstruowania rozwiązań (rys. 3). Postępując w ten sposób, musimy otrzymać punkt (x_1, y_1) o współrzędnych całkowitych, należący do fragmentu hiperboli łączącego punkty $(1, 0)$ i $(N, 1)$. Fragment ten możemy potraktować jako wykres funkcji rosnącej dla $x \in [1, N]$, zatem $0 \leqslant y_1 \leqslant 1$. Stąd dostajemy

$$(x_1, y_1) = (1, 0) = (a_1, a_0) \quad \text{lub} \quad (x_1, y_1) = (N, 1) = (a_2, a_1),$$

a to już dowodzi tezy.

Pokażemy teraz drugi dowód, który jest bardziej analityczny. Podobnie jak poprzednio wychodzimy od punktu (x_0, y_0). Jeśli $y_0 = 0$, to nie ma czego dowodzić. W przeciwnym przypadku, ponieważ

$$x_0^2 - Nx_0y_0 + y_0^2 = 1 > 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{x_0}{y_0} > 0,$$

więc

$$\frac{x_0}{y_0} > \frac{N + \sqrt{N^2 - 4}}{2}.$$

Przypomnijmy, że granicą malejącego ciągu $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ jest właśnie $\dfrac{N + \sqrt{N^2 - 4}}{2}$. Zatem możemy dobrać takie $k \geqslant 1$, że

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \frac{x_0}{y_0} < \frac{a_k}{a_{k-1}}.$$

(gdy $k = 1$ to skorzystamy z nierówności $x_0 a_{k-1} < y_0 a_k$). Rozważmy następujący układ równań z niewiadomymi n i m:

$$\begin{cases} x_0 = na_k + ma_{k+1}, \\ y_0 = na_{k-1} + ma_k. \end{cases}$$

Wyznacznik główny tego układu jest równy

$$W = a_k^2 - a_{k+1}a_{k-1} = 1,$$

zatem rozwiązania tego układu, $n = \frac{W_n}{W}$, $m = \frac{W_m}{W}$, są liczbami całkowitymi. Z wyboru k wynika, że $n \geqslant 0$ i $m > 0$. Gdy powyższe równania wstawimy do

$$x_0^2 - Nx_0y_0 + y_0^2 = 1$$

i skorzystamy z rekurencji określającej ciąg (a_k), to otrzymamy

$$n^2 + Nnm + m^2 = 1.$$

Stąd $n = 0$ i $m = 1$ co dowodzi tezy.

Ostatni dowód przeprowadzimy przy użyciu wzoru Picka. Przypomnijmy, że dzięki niemu da się obliczyć pole wielokąta (niekoniecznie wypukłego), którego wszystkie wierzchołki mają współrzędne całkowite. Pole to jest równe $w + \frac{1}{2}b - 1$, gdzie w to liczba punktów o obu współrzędnych całkowitych wewnątrz danego wielokąta, a b na jego brzegu. Jeśli rozpatrzymy trójkąt o wierzchołkach w punktach $(0, 0)$, (a_{k-1}, a_k) i (a_k, a_{k+1}), to jego pole wynosi

$$\left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_{k-1} & a_k \\ a_k & a_{k+1} \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}.$$

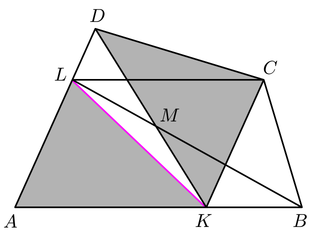
Wykorzystując wzór Picka, stwierdzamy, że jedyne punkty o obu współrzędnych całkowitych w tym trójkącie to jego wierzchołki. Fragment hiperboli łączący punkty (a_{k-1}, a_k) i (a_k, a_{k+1}) też jest zawarty w tym trójkącie. W połączeniu z wnioskiem ze wzoru Picka dostajemy tezę.

Tłumaczył Marcin Hauzer

Rozwiązanie zadania M 1148.
Dodając do obu stron dowodzonej równości pole trójkąta BKM, sprowadzamy ją do postaci

(1) $\qquad [ABL] = [KBCD]$,

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.



Ale $[KBL] = [KBC]$, gdyż oba trójkąty mają wspólną podstawę KB, a długości wysokości opuszczonych na te podstawy są równe. Podobnie $[AKL] = [KCD]$, ponieważ podstawy AL i KC obu trójkątów są tej samej długości, a wysokości opuszczone na te podstawy są równe odległości między prostymi AL i KC. Dodając stronami uzyskane równości otrzymujemy dowodzoną zależność (1).