czyli

$$c\left(\frac{q}{q'}\right)^n < c'.$$

Jednak po lewej stronie mamy rosnącą funkcję wykładniczą, zatem otrzymaliśmy sprzeczność.

Łatwo zauważyć, że wraz ze wzrostem k różnica liczb $\sqrt[k]{a_k}$ i $\sqrt[k]{5a_k}$ dąży do zera. Wynika to szybko stąd, że $(\sqrt[n]{a_n})$ jest ograniczony z góry. Z poprzedniego spostrzeżenia wynika, że jeśli moja hipoteza jest prawdziwa, to kres górny $\sqrt[k]{a_k}$ nie przekracza kresu dolnego $\sqrt[k]{5a_k}$, zatem musi istnieć taka liczba a, że dla każdego $k \in \mathbb{Z}_+$ będzie

$$\sqrt[k]{a_k} \leqslant a \leqslant \sqrt[k]{5a_k}.$$

Skoro jednak skrajne strony mają wspólną granicę przy $k \to \infty$, to z twierdzenia o trzech ciągach tą granicą musi być a. Widzimy więc, że istnieje taka liczba, że ciąg (a_n) możemy ograniczyć z dołu przez ciąg geometryczny o dowolnym ilorazie dodatnim mniejszym od tej liczby, z góry zaś przez ciąg o dowolnym ilorazie od niej większym. Pokazuje to, że choć iloraz a_{n+1}/a_n nie dąży do żadnej liczby przy $n \to \infty$, to (przy założeniu prawdziwości hipotezy (13)) zachowanie ciągu (a_n) przypomina trochę zachowanie ciągu geometrycznego o ilorazie a.

Na nierównościach spełnianych przez wyrazy ciągu nie kończą się jego ciekawe własności. Szukając informacji o nim w Internecie, wpisałem jego początkowe wyrazy na stronie *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (http://www.research.att.com/~njas/sequences/). Okazało się, że istnieje on w tamtejszej bazie danych jako ciąg A045545. Znalazłem tam też informację, że Benoit Cloitre udowodnił, iż równość

$$a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy n i $n+2$ są liczbami pierwszymi bliźniaczymi. Widać stąd, jak szeroką gamę problemów otwiera omawiany ciąg. Zmagania z nim dały mi wiele radości i satysfakcji.

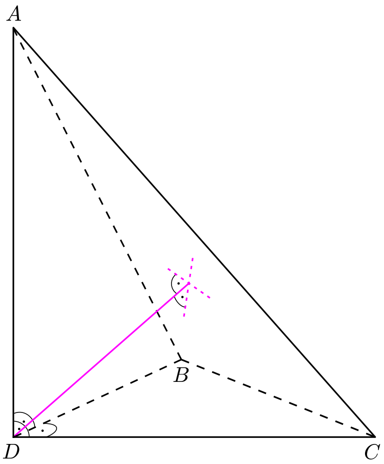
Czytelników zainteresowanych tematem przedstawionym w niniejszym artykule zapraszam do przeczytania całej pracy, której aktualna wersja znajduje się pod adresem http://students.mimuw.edu.pl/~js248325/praca.pdf.

Zadania

Redaguje Waldemar POMPE

M 1162. Na płaszczyźnie danych jest 5 punktów o tej własności, że pole każdego trójkąta o wierzchołkach w tych punktach nie przekracza 1. Wykazać, że punkty te leżą w pewnym trapezie o polu nieprzekraczającym 3.
Rozwiązanie na str. 6

M 1163. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym kąty płaskie przy wierzchołku D są proste (rys. 1). Wykazać, że spodek wysokości tego czworościanu, opuszczonej z wierzchołka D, pokrywa się z punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC.
Rozwiązanie na str. 7



Rys. 1

M 1164. Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Wykazać, że każdy wyraz ciągu

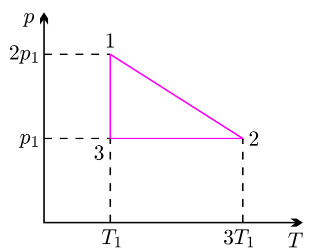
$$n!+1\,,\ n!+2\,,\ \ldots\,,\ n!+n$$

ma dzielnik pierwszy, który nie jest dzielnikiem żadnego innego wyrazu tego ciągu.
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 687. Z butli, w której znajdują się silnie zagęszczone pary potasu, ucieka przez wąską poziomą rurkę wiązka atomów. Oszacować temperaturę par, wiedząc, że średnie obniżenie wiązki w odległości $l = 50\,\mathrm{cm}$ od butli wynosi $h = 3\,\mu m$.
Rozwiązanie na str. 7

F 688. Nad gazem idealnym wykonano cykl przemian pokazany na rysunku 2. Znaleźć stosunek maksymalnej objętości gazu do minimalnej, osiąganych w tym cyklu przemian, objętości.
Rozwiązanie na str. 16



Rys. 2