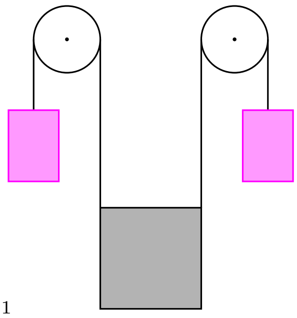
Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
430 ($WT = 2{,}45$) i **431** ($WT = 2{,}35$)
z numeru 1/2007

Tomasz Tkocz	– Rybnik	40,79
Konrad Kapcia	– Częstochowa	38,99
Krzysztof Magiera	– Łosiów	33,06
Tomasz Wietecha	– Tarnów	31,64
Jerzy Witkowski	– Radlin	28,91
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	20,97
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	18,86



Rys. 1

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2007

Przypominamy treść zadań:

434. Jednorodna kwadratowa płytka o boku a wisi na dwóch długich niciach przełożonych przez bloki, a na drugim końcu każdej nici wisi ciężarek o masie równej połowie masy płytki (rys. 1). Obliczyć częstotliwość małych obrotów płytki w płaszczyźnie rysunku.

Wskazówka: moment bezwładności płytki względem osi przechodzącej przez jej środek i prostopadłej do jej płaszczyzny jest równy $\frac{1}{6}ma^2$ (m – masa płytki).

435. Z kondensatora o pojemności C i zwojnicy zestawiono obwód. Drgania elektryczne w tym obwodzie okazały się tłumione, z dwóch powodów:
a) kondensator charakteryzuje się pewną niewielką upływnością, co można przedstawić jako równolegle dołączony do niego opornik o dużym oporze R_1,
b) uzwojenie zwojnicy ma pewną niewielką oporność R_2.
Aby poprawić dobroć obwodu, możemy wsuwać do zwojnicy lub wysuwać rdzeń ferromagnetyczny, zmieniając w ten sposób indukcyjność L. Straty energii w rdzeniu (wynikające z histerezy i prądów wirowych) są pomijalnie małe. Jak należy wybrać wartość L, aby dobroć osiągnęła wartość maksymalną?

434. Rozważmy najpierw energię potencjalną układu, która zależy od kąta α, ale nie od przesunięcia pionowego x środka płytki (gdyż to drugie pociąga za sobą przeciwne przesunięcie obu ciężarków). Do obliczenia tej energii wystarczy zauważyć, że przy ustalonym położeniu środka płytki łączna energia potencjalna ciężarków zależy od wysokości, na której znajduje się środek górnego boku płytki. Przy obrocie płytki o α ten punkt ulega obniżeniu o $\frac{a}{2}(1-\cos\alpha)$, zatem

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}mga(1-\cos\alpha),$$

a dla małych α otrzymujemy $E_{\text{pot}} = \dfrac{1}{4}mga\alpha^2$. Ruch układu jest złożeniem ruchu drgającego, w którym przesunięcie pionowe środka płytki jest rzędu α^2, oraz jednostajnego ruchu płytki wzdłuż osi pionowej połączonego z przeciwnym ruchem ciężarków. Ten drugi ruch pominiemy, gdyż nie wpływa on w żaden sposób na drgania. Rozpatrując energię kinetyczną w przybliżeniu małych drgań, przyjmiemy więc, że środek płytki jest nieruchomy, a prędkości ciężarków są przeciwnie skierowane i równe $\frac{1}{2}a\dot{\alpha}$. Ich łączna energia kinetyczna wynosi $\frac{1}{8}ma^2\dot{\alpha}^2$, a po dodaniu energii ruchu obrotowego płytki

$$\frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 = \frac{1}{12}ma^2\dot{\alpha}^2$$

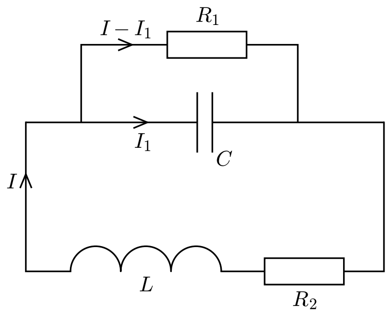
otrzymujemy

$$E_{\text{kin}} = \frac{5}{24}ma^2\dot{\alpha}^2.$$

Teraz z warunku $E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \text{const}$ natychmiast już znajdujemy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5a}{6g}}.$$

435. Oznaczmy natężenie prądu płynącego przez zwojnicę jako I, a natężenie prądu płynącego przez kondensator jako I_1 (rys. 2).



Rys. 2

Obowiązują wzory

$$\dot{q} = I_1 \qquad \frac{q}{C} = R_1(I - I_1) = -L\dot{I} - R_2 I,$$

gdzie q jest ładunkiem kondensatora. Po wyeliminowaniu I_1 dochodzimy do równania

$$LC\ddot{I} + \left(\frac{L}{R_1} + R_2C\right)\dot{I} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)I = 0.$$

Jest to równanie oscylatora o wykładniku tłumienia równym

$$\alpha = \frac{1}{2LC}\left(\frac{L}{R_1} + R_2C\right).$$

Zgodnie z definicją dobroci Q wynosi ona

$$Q = \frac{\omega}{2\alpha} = \frac{\sqrt{LC}}{\frac{L}{R_1} + R_2C}.$$

Wyrażenie to osiąga maksymalną wartość dla $L = R_1R_2C$.

Klub 44

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2007

Przypominamy treść zadań:

537. Liczby a, b, c są długościami boków trójkąta. Udowodnić, że
$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}\leqslant 3.$$

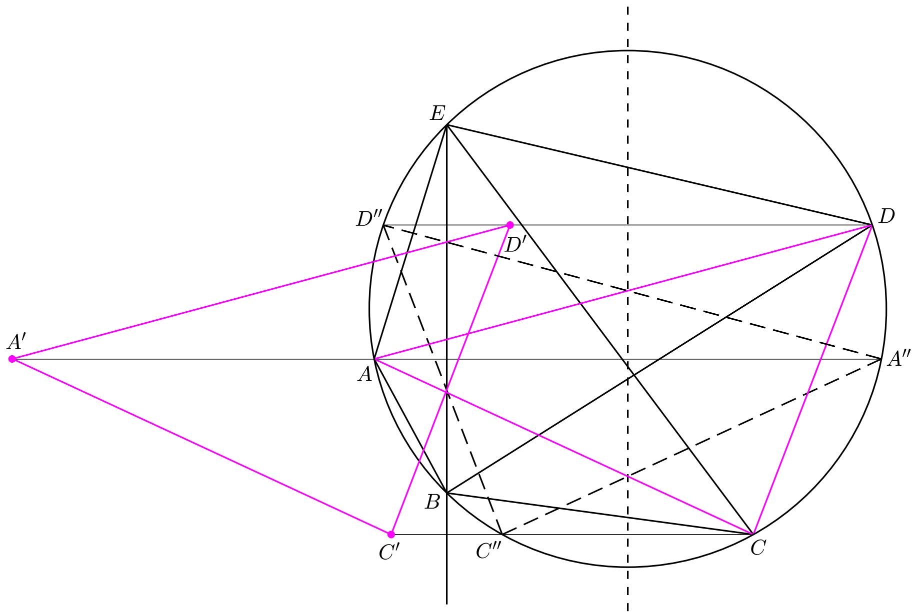
538. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg. Punkty A', C', D' są odpowiednio ortocentrami trójkątów BAE, BCE, BDE. Dowieść, że trójkąty ACD i $A'C'D'$ są przystające.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
529 ($WT = 2{,}22$) i **530** ($WT = 1{,}77$)
z numeru 11/2006

Krzysztof Dorobisz	– Kraków	47,41
Michał Jastrzębski	– Warszawa	47,26
Łukasz Garncarek	– Opole	44,11
Andrzej Jóźwik	– Warszawa	42,67
Tomasz Wietecha	– Tarnów	39,00
Janusz Olszewski	– Suwałki	38,91
Andrzej Daniluk	– Warszawa	37,86
Tomasz Warszawski	– Kraków	36,90
Krzysztof Kamiński	– Pabianice	36,52
Dariusz Kurpiel	– Posada Zarszyn	35,82

Taka gratka rzadko się zdarza! Klub 44 wzbogacił się o trzy całkiem nowe nazwiska: Krzysztof Dorobisz, Michał Jastrzębski, Łukasz Garncarek. Witamy w Klubie!

537. Oznaczmy składniki lewej strony kolejno przez A, B, C, a ich mianowniki odpowiednio przez x, y, z; są to liczby dodatnie. Mamy wówczas $a=\frac{1}{4}(y+z)^2$ (i analogiczne wyrażenia dla b, c); dalej,
$$b+c-a=\frac{(z+x)^2+(x+y)^2-(y+z)^2}{4}=\frac{sx-yz}{2},$$
gdzie $s=x+y+z$; i wreszcie
$$A=\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{sx-yz}{2}},\qquad B=\frac{1}{y}\sqrt{\frac{sy-zx}{2}},\qquad C=\frac{1}{z}\sqrt{\frac{sz-xy}{2}}.$$
Można przyjąć, że $x\leqslant y\leqslant z$. Z zależności $(z-x)(z-y)\geqslant 0$ oraz $z\geqslant\frac{1}{2}(x+y)$ uzyskujemy oszacowania
$$C^2=\frac{(x+y+z)z-xy}{2z^2}=1-\frac{(z-x)(z-y)}{2z^2}\leqslant 1$$
oraz
$$\begin{aligned}A^2+B^2&=\frac{(x+y+z)x-yz}{2x^2}+\frac{(x+y+z)y-zx}{2y^2}=\\&=\frac{(x+y)^2xy-z(x+y)(x-y)^2}{2x^2y^2}\leqslant\\&\leqslant\frac{(x+y)^2xy-\frac{1}{2}(x+y)^2(x-y)^2}{2x^2y^2}=\\&=2-\frac{(x^2+y^2)(x-y)^2}{4x^2y^2}\leqslant 2.\end{aligned}$$
Tak więc
$$C\leqslant 1\qquad\text{oraz}\qquad\frac{A+B}{2}\leqslant\sqrt{\frac{A^2+B^2}{2}}\leqslant 1,$$
i ostatecznie $A+B+C\leqslant 3$.



538. Punkt A'', symetryczny do ortocentrum A' trójkąta BAE względem prostej BE, leży na okręgu opisanym na tym trójkącie, czyli opisanym na pięciokącie $ABCDE$. Podobnie punkty C'' i D'', symetryczne do C' i D' względem BE, leżą na tym okręgu. Odcinki AA'', CC'', DD'' (prostopadłe do BE) są równoległymi cięciwami tego okręgu, skąd wynika, że trójkąt $A''C''D''$ jest symetryczny do trójkąta ACD względem średnicy równoległej do BE.

Trójkąt $A'C'D'$ jest symetryczny do $A''C''D''$ względem prostej BE; jest więc obrazem trójkąta ACD w przekształceniu będącym złożeniem dwóch symetrii osiowych – takie przekształcenie jest oczywiście izometrią (dokładniej: przesunięciem, skoro osie symetrii są równoległe) i mamy tezę zadania.