# Klub 44

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

Czołówka ligi zadaniowej
**Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
**531** ($WT = 3{,}28$) i **532** ($WT = 1{,}23$)
z numeru 12/2006

| | | |
|---|---|---|
| Janusz Olszewski | – Suwałki | 43,42 |
| Andrzej Jóźwik | –Warszawa | 42,67 |
| Tomasz Warszawski | – Kraków | 41,41 |
| Andrzej Daniluk | – Warszawa | 39,09 |
| Tomasz Wietecha | – Tarnów | 39,00 |
| Dariusz Kurpiel | – Posada Zarszyn | 37,05 |
| Krzysztof Kamiński | – Pabianice | 36,52 |

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2007

Przypominamy treść zadań:

**539**. Niech $T_1, \ldots, T_m$ będą trójelementowymi podzbiorami zbioru $n$-elementowego $X$; zakładamy, że zbiory $T_i$, $T_j$ (dla $i \neq j$) mają co najwyżej jeden element wspólny. Dowieść, że istnieje podzbiór $S$ zbioru $X$, liczący nie mniej niż $\lfloor\sqrt{2n}\rfloor$ elementów i niezawierający żadnego ze zbiorów $T_i$.

**540**. Wyznaczyć wszystkie pary $(x, y)$ liczb całkowitych dodatnich, dla których każda z liczb $x+y$, $1+xy$ jest potęgą liczby 2 o wykładniku całkowitym.

**539**. Wystarczy określić $S$ jako podzbiór zbioru $X$, który nie zawiera żadnego ze zbiorów $T_i$ oraz ma maksymalną liczbę elementów (wśród wszystkich podzbiorów o tej własności). Taki zbiór $S$ nie musi być jedyny – jeśli jest ich więcej, wybieramy i ustalamy dowolny z nich jako zbiór $S$. Przyjmijmy, że ma on $s$ elementów; mamy wykazać, że $s \geqslant \lfloor\sqrt{2n}\,\rfloor$.

Weźmy dowolny element $x \in X$, który nie należy do $S$. Zbiór $S \cup \{x\}$, jako większy od $S$, musi zawierać któryś ze zbiorów $T_i$. Znów: niekoniecznie jedyny – wybierzmy więc zbiór $T_i$ (zawarty w $S \cup \{x\}$) o najmniejszym numerze i oznaczmy ten numer przez $i(x)$. Część wspólną zbiorów $T_{i(x)}$ oraz $S$ oznaczmy przez $S_x$.

Sam element $x$ należy, rzecz jasna, do zbioru $T_{i(x)}$. Zbiór $S_x$ składa się z dwóch pozostałych elementów zbioru $T_{i(x)}$.

Różne elementy $x, y \in X \setminus S$ wyznaczają zbiory $S_x$, $S_y$, które nie są identyczne (bo różne zbiory $T_i$, $T_j$ mają przecięcie co najwyżej jednoelementowe). Zatem przyporządkowanie $x \mapsto S_x$ jest różnowartościową funkcją ze zbioru $X \setminus S$ do zbioru wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru $S$. Otrzymujemy nierówność $n - s \leqslant \binom{s}{2}$, którą przepisujemy jako $2n \leqslant s^2 + s$. Stąd

$$\sqrt{2n} \leqslant \sqrt{s^2+s} < s+1,$$

wobec czego

$$\lfloor\sqrt{2n}\,\rfloor \leqslant s.$$

**540**. Niech $(x, y)$ będzie jedną z szukanych par. Dla pewnej pary wykładników naturalnych $(k, \ell)$ spełniony jest układ równań

$$x + y = 2^k,$$
$$1 + xy = 2^\ell.$$

Odejmując oraz dodając te równania stronami, dostajemy nowy układ

$$(1) \qquad (x-1)(y-1) = 2^\ell - 2^k,$$
$$(2) \qquad (x+1)(y+1) = 2^\ell + 2^k;$$

widać, że $\ell \geqslant k \geqslant 1$ i że liczby $x$, $y$ są nieparzyste.

Jeżeli $k = \ell$, to z równania (1) mamy $x = 1$ lub $y = 1$; pozostała niewiadoma ma wtedy wartość $2^k - 1$, w myśl równania (2). Każda z par $(x, y)$ postaci

$$(1\ ,\ 2^k - 1) \quad \text{lub} \quad (2^k - 1\ ,\ 1), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots\ ,$$

spełnia warunek zadania.

Rozważmy teraz przypadek, gdy $k < \ell$. Czynniki iloczynu po lewej stronie równania (1) są wówczas dodatnimi liczbami parzystymi. Niech $\alpha$ i $\beta$ będą największymi wykładnikami naturalnymi, dla których (odpowiednio) $x - 1$ dzieli się przez $2^\alpha$, zaś $y - 1$ dzieli się przez $2^\beta$; z równania (1) widać, że $\alpha + \beta = k$.

Gdyby oba wykładniki $\alpha$, $\beta$ były większe od 1, to liczby $x + 1$ i $y + 1$, czyli czynniki lewej strony równania (2), byłyby liczbami parzystymi niepodzielnymi przez 4, wbrew temu, że prawa strona (2) dzieli się przez $2^k$ (a w tym przypadku $k = \alpha + \beta \geqslant 4$).

Gdyby oba wykładniki $\alpha$, $\beta$ były równe 1, to czynniki lewej strony równania (2) byłyby podzielne przez 4, wbrew temu, że prawa strona (2) nie dzieli się przez $2^{k+1}$ (a w obecnym przypadku $k = \alpha + \beta = 2$).

Pozostaje możliwość, że dokładnie jedna z liczb $\alpha$, $\beta$ jest równa 1. Niech np. $\alpha \geqslant 2$, $\beta = 1$; tak więc $k \geqslant 3$, $\alpha = k - 1$. Wtedy $x + 1$ dzieli się przez $2^1$, ale nie przez $2^2$, i z równania (2) wynika, że $y + 1$ dzieli się przez $2^{k-1}$, ale nie przez $2^k$. Możemy więc napisać

$$x - 1 = 2^{k-1}u, \qquad y + 1 = 2^{k-1}v\,; \qquad u,\ v \text{ – liczby nieparzyste.}$$

Zatem

$$2^k = x + y = 2^{k-1}(u + v),$$

skąd $u = v = 1$, i ostatecznie

$$x = 2^{k-1} + 1, \qquad y = 2^{k-1} - 1.$$

Oznaczając $k - 1 = j$ oraz uwzględniając możliwość zamiany ról $\alpha$ i $\beta$ (czyli $x$ i $y$), dostajemy drugą serię par $(x, y)$:

$$(2^j + 1\ ,\ 2^j - 1) \quad \text{lub} \quad (2^j - 1\ ,\ 2^j + 1), \qquad j = 2, 3, 4, \ldots\ ;$$

również i one spełniają wymagany warunek.

# Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej
**Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
**432** ($WT = 2{,}10$) i **433** ($WT = 3{,}20$)
z numeru 2/2007

| | | |
|---|---|---|
| Tomasz Tkocz | – Rybnik | 42,68 |
| Konrad Kapcia | – Częstochowa | 38,99 |
| Krzysztof Magiera | – Łosiów | 35,16 |
| Jerzy Witkowski | – Radlin | 29,55 |
| Andrzej Idzik | – Bolesławiec | 23,63 |
| Andrzej Nowogrodzki | – Chocianów | 21,18 |
| Radosław Poleski | – Kołobrzeg | 17,04 |

W poprzedniej serii dobre rozwiązania przysłał także p. Tomasz Wietecha. Nie zostały one jednak – niestety – uwzględnione w punktacji z powodu spóźnienia. Prosimy przestrzegać podawanych terminów!

*Redaguje Jerzy B. BROJAN*

## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2007

Przypominamy treść zadań:

**436**. Stacja kosmiczna składa się z dwóch części o masie 10 ton każda, odległych wzajemnie o 30 m. Obliczyć siłę rozciągającą stację, gdy krąży ona wokół Ziemi na wysokości 700 km w pozycji „pionowej” (jedna część bliżej Ziemi, druga dalej).

**437**. Mamy do dyspozycji ogniwa o SEM = 1 V bez oporu wewnętrznego oraz oporniki o oporze 1 Ω. Jak z tych elementów zbudować układ o dwóch końcówkach równoważny baterii o SEM = 0,8 V i oporze wewnętrznym 0,75 Ω? Należy użyć możliwie małej liczby ogniw i oporników. Najlepsze układy (o najmniejszej liczbie elementów) zostaną przedstawione w omówieniu rocznym, jednak osiągnięcie „rekordu” nie jest wymagane do uznania rozwiązania za prawidłowe.

**436**. Oznaczmy promień orbity wewnętrznej jako $R_1$, zewnętrznej jako $R_2$, masę każdej części jako $m$, szukaną siłę ich wzajemnego oddziaływania jako $F$, masę Ziemi jako $M$, a prędkość kątową zespołu jako $\omega$. Z równań ruchu

$$m\omega^2 R_1 = \frac{\mathrm{G}Mm}{R_1^2} - F, \qquad m\omega^2 R_2 = \frac{\mathrm{G}Mm}{R_2^2} - F$$

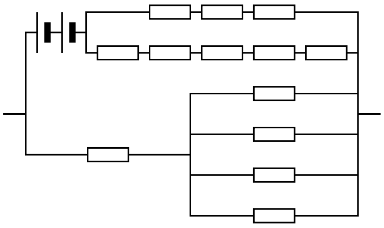
należy wyeliminować $\omega$ i wyznaczyć $F$

$$F = \frac{\mathrm{G}Mm}{R_1+R_2}\left(\frac{R_2}{R_1^2} - \frac{R_1}{R_2^2}\right).$$

Aby uprościć to wyrażenie, trzeba uwzględnić, że wielkość $\Delta R = R_2 - R_1$ jest znacznie mniejsza od samych $R_2$ i $R_1$ (oznaczmy $R_2 \approx R_1 \approx R$). Ponadto wygodne jest podstawienie $\mathrm{G}M = \mathrm{g}R_z^2$ (gdzie $R_z$ – promień Ziemi). Po tych przekształceniach otrzymujemy

$$F = \frac{3}{2}m\mathrm{g}\frac{R_z^2\Delta R}{R^3} = 0{,}51\,\mathrm{N}.$$

**437**. Na rysunku przedstawiono jedno z możliwych rozwiązań, składające się z 2 ogniw i 13 oporników.



**Rozwiązanie zadania M 1077.**
Niech $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_l\}$ będą takimi rozłącznymi podzbiorami zbioru $S$, że $A \cup B = S$ oraz

$$(*) \qquad n = a_1a_2\ldots a_k = b_1b_2\ldots b_l\,.$$

Gdyby w zbiorze $S$ istniała liczba podzielna przez 19, to taka liczba byłaby tylko jedna w tym zbiorze i w konsekwencji jedna strona równości $(*)$ byłaby podzielna przez 19, a druga nie.

Zatem zbiór $S$ składa się z 18 liczb całkowitych, które dają odpowiednio reszty $1, 2, \ldots, 18$ z dzielenia przez 19. Wtedy wykonując prosty rachunek (lub na mocy twierdzenia Wilsona) mamy

$$n^2 = (a_1a_2\ldots a_k)\cdot(b_1b_2\ldots b_l) \equiv 18! \equiv 18 \equiv -1 \pmod{19}\,.$$

Bezpośrednie sprawdzenie dowodzi jednak, że kwadrat liczby całkowitej nie może dawać reszty 18 z dzielenia przez 19. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że opisany w treści zadania podział zbioru $S$ nie istnieje.

**Rozwiązanie zadania M 1078.**
Taki wielomian $f(x)$ istnieje.

Niech $g(x)$ będzie wielomianem stopnia 98 o współczynnikach całkowitych. Wykażemy, że wielomian $f(x) = x(x-1)g(x)+1$ spełnia warunki zadania.

Oznaczmy: $f^k(x) = f(f\ldots f(x)\ldots)$ ($k$-krotne złożenie funkcji $f$). Wystarczy dowieść, że dla każdej liczby całkowitej $n$ liczby $f(n)$ i $f^k(n)$ dla $k \geqslant 2$ są względnie pierwsze.

Niech $p$ będzie dzielnikiem liczby $f(n)$. Wykażemy indukcyjnie, że $f^k(n) \equiv 1 \pmod{p}$ dla $k \geqslant 2$, a stąd bezpośrednio wynika, że liczby $f(n)$ i $f^k(n)$ (dla $k \geqslant 2$) są względnie pierwsze. Dla $k = 2$ mamy

$$f(f(n)) = f(n)(f(n)-1)\,g(f(n)) + 1 \equiv 1 \pmod{p}\,.$$

Jeśli z kolei $f^k(n) \equiv 1 \pmod{p}$, to

$$f^{k+1}(n) = f(f^k(n)) = f^k(n)(f^k(n)-1)\,g(f^k(n)) + 1 \equiv 1 \pmod{p}\,,$$

co kończy dowód indukcyjny i rozwiązanie zadania.