Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 2008

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
541 ($WT = 1{,}98$) i **542** ($WT = 2{,}43$)
z numeru 5/2007

Dariusz Kurpiel	– Posada Zarszyn	43,47
Krzysztof Kamiński	– Pabianice	42,75
Witold Bednarek	– Łódź	41,79
Grzegorz Karpowicz	– Wrocław	39,24
Paweł Najman	– Jaworzno	38,49
Paweł Kubit	– Kraków	37,82
Wojciech Maciak	– Warszawa	35,69

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 553, 554

Redaguje Marcin E. KUCZMA

553. Wyznaczyć wszystkie trójki dodatnich liczb wymiernych x, y, z, dla których każda z liczb $x + \frac{1}{y}$, $y + \frac{1}{z}$, $z + \frac{1}{x}$ jest całkowita.

554. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB i spełniają warunki $|\sphericalangle FDB| = |\sphericalangle EDC|$, $|\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle FEA|$, $|\sphericalangle EFA| = |\sphericalangle DFB|$. Dowieść, że proste zawierające wysokości trójkątów AEF, BFD, CDE, poprowadzone odpowiednio z wierzchołków A, B, C, przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 554 zaproponował pan Michał Kieza z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/2007

Przypominamy treść zadań:

545. Rozważamy trójkąty ABC spełniające warunek $|ID| = |IE|$, gdzie I jest środkiem okręgu wpisanego, a D, E są punktami przecięcia prostych AI, BI odpowiednio z bokami BC, CA. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb α, β, γ, które mogą być miarami kątów $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ takiego trójkąta.

546. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n wyznaczyć najmniejszą możliwą liczbę niezerowych współczynników wielomianu stopnia n, o współczynnikach rzeczywistych, mającego n różnych pierwiastków rzeczywistych.

545. Weźmy pod uwagę dowolny trójkąt ABC o kątach $|\sphericalangle A| = \alpha$, $|\sphericalangle B| = \beta$, $|\sphericalangle C| = \gamma$. Niech F będzie punktem symetrycznym do E względem prostej CI; leży on na półprostej $CB^{\rightarrow}$. Zachodzą równości $|IE| = |IF|$ oraz

$$|\sphericalangle CDI| = \frac{\alpha}{2} + \beta, \qquad |\sphericalangle CEI| = \frac{\beta}{2} + \alpha = |\sphericalangle CFI|.$$

Rozważany w zadaniu warunek $|ID| = |IE|$, czyli $|ID| = |IF|$, jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy albo punkty D i F pokrywają się, albo odcinek DF jest podstawą trójkąta równoramiennego IDF. Te dwie sytuacje są odpowiednio równoważne równościom

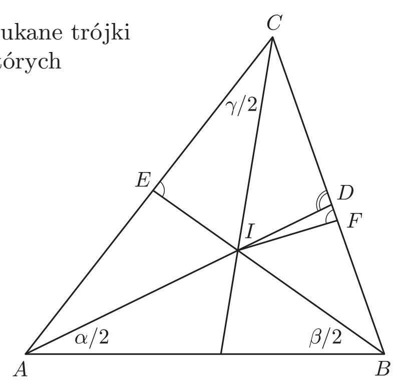
$$|\sphericalangle CFI| = |\sphericalangle CDI| \quad \text{oraz} \quad |\sphericalangle CFI| = 180^\circ - |\sphericalangle CDI|.$$

Badany warunek jest więc równoważny alternatywnie

$$\frac{\beta}{2} + \alpha = \frac{\alpha}{2} + \beta \quad \text{lub} \quad \frac{\beta}{2} + \alpha = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)$$

– czyli $\alpha = \beta$ lub $\alpha + \beta = 120^\circ$.

Stąd odpowiedź: szukane trójki (α, β, γ) to te, w których $\alpha = \beta$ lub $\gamma = 60^\circ$.



546. Przypuśćmy, że wielomian n-tego stopnia

$$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \qquad (a_n \neq 0)$$

ma n różnych pierwiastków rzeczywistych. Pomiędzy każdymi dwoma sąsiednimi miejscami zerowymi funkcji $P(x)$ leży miejsce zerowe funkcji pochodnej (twierdzenie Rolle'a). Zatem wielomian $P'(x)$ ma $n-1$ różnych pierwiastków rzeczywistych; itd. (indukcja): dla $k = 1, \ldots, n{-}1$ wielomian $P^{(k)}(x)$ ma $n-k$ różnych pierwiastków rzeczywistych. Wszystkie jego pierwiastki są jednokrotne, bo $P^{(k)}(x)$ jest wielomianem stopnia $n-k$.

Zauważmy teraz, że

$$P^{(k)}(x) = k!a_k + (k+1)!a_{k+1}x + (\text{wyrazy wyższych stopni}).$$

Skoro wielomian $P^{(k)}(x)$ nie ma pierwiastków wielokrotnych, to nie jest podzielny przez wielomian x^2. Zatem co najmniej jedna z liczb a_k oraz a_{k+1} jest różna od zera. W ciągu $(a_0, \ldots, a_n)$, z ostatnim wyrazem $a_n \neq 0$, jest więc co najmniej $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ wyrazów niezerowych.

To minimum daje się zrealizować. Bierzemy dowolny wielomian rzeczywisty $Q(x)$ stopnia $m = \lfloor n/2 \rfloor$, mający m różnych pierwiastków dodatnich; na przykład $Q(x) = (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-m)$. Wówczas każdy z wielomianów

$$P(x) = Q(x^2) \quad \text{oraz} \quad P(x) = xQ(x^2),$$

odpowiednio stopni $2m$ oraz $2m+1$ (jedna z tych liczb równa się n), ma tyle różnych pierwiastków rzeczywistych, ile wynosi jego stopień; zaś w ciągu jego współczynników co drugi wyraz jest równy zeru.

Tak więc szukane minimum wynosi $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 2008

Zadania z fizyki nr 450, 451

Redaguje Jerzy B. BROJAN

450. Jednorodny cienki pręt postawiono pionowo na poziomej powierzchni i puszczono, w wyniku czego się przewrócił. Jeśli dolny koniec pręta się przy tym nie poślizgnął, to czy nastąpiło oderwanie się tego końca od podłoża przed uderzeniem o podłoże innych części pręta?

Jaka będzie odpowiedź, jeśli podobne doświadczenie przeprowadzić z prętem niejednorodnym – zwężającym się z dołu do góry, albo odwrotnie? (Istotna jest, oczywiście, nie tyle sama grubość, ile masa na jednostkę długości.)

451. Transformator doskonały (tzn. bez strat energii i bez rozproszenia pola magnetycznego) składa się z dwóch uzwojeń o indukcyjnościach L_1 i L_2. Obliczyć częstotliwość drgań własnych tego transformatora, jeśli do pierwszego uzwojenia dołączono kondensator o pojemności C_1, a do drugiego – kondensator o pojemności C_2.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
440 ($WT = 1{,}43$) i **441** ($WT = 2{,}63$)
z numeru 6/2007

Tomasz Wietecha	– Tarnów	40,50
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	40,22
Jerzy Witkowski	– Radlin	31,82
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	24,58
Jacek Konieczny	– Poznań	19,16
Radosław Poleski	– Kołobrzeg	18,96

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/2007

Przypominamy treść zadań:

442. Uporządkować poniższe układy optyczne według wartości ogniskowej:
1. dwie jednakowe soczewki płaskowypukłe zetknięte powierzchniami płaskimi,
2. dwie soczewki (takie same, jak w punkcie 1) ustawione powierzchniami płaskimi do siebie i rozsunięte na pewną (nie bardzo dużą) odległość,
3. jak w punkcie 2, z płaskorównoległą płytką szklaną wstawioną między soczewkami.

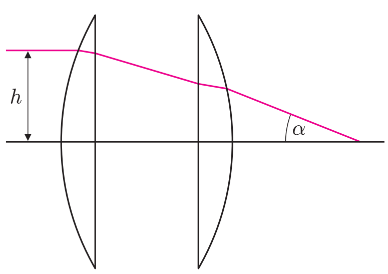
Wskazówka: Ogniskową układu optycznego (niekoniecznie cienkiej soczewki) można zdefiniować następująco: jeśli na układ pada promień światła równoległy do osi optycznej i odległy od niej o h, a po wyjściu z układu jest nachylony pod niewielkim kątem α do osi, to ogniskowa wynosi $f = h/\alpha$.

443. Oscylator anharmoniczny tłumiony jest ciałem poruszającym się pod wpływem dwóch sił – siły ściągającej ciało do położenia równowagi i zależnej od wychylenia (niekoniecznie proporcjonalnie) oraz siły tłumiącej, zależnej od prędkości. Zanotowano kolejne wartości amplitudy drgań takiego oscylatora, wraz z odstępami czasu (jednostki dowolne):

A	1,00	0,90	0,81	0,74	0,67	0,61	0,55	0,51	0,46	0,42	0,39	0,36	0,33	0,31	0,28	0,26	0,24
T	1,00	1,05	1,11	1,17	1,22	1,28	1,34	1,41	1,47	1,53	1,60	1,67	1,74	1,81	1,88	1,95	

Jaka zależność pierwszej siły od wychylenia i drugiej siły od prędkości jest zgodna z tą tabelą?

442. Z rysunku widać, że przy ustalonej wartości h warstwa powietrza powoduje przesunięcie w stronę osi (w dół) promienia przecinającego wnętrze drugiej soczewki, bez zmiany jego kierunku.



To zaś oznacza zmniejszenie kąta padania od wewnątrz na powierzchnię kulistą, mniejszą zmianę kierunku przy załamaniu i zmniejszenie kąta α między promieniem wychodzącym a osią optyczną. Zgodnie z podanym uogólnieniem pojęcia ogniskowej ulegnie ona zwiększeniu. (Przy dużej odległości między soczewkami promień wychodzący zostanie odchylony w odwrotną stronę, czyli ogniskowa stanie się ujemna.)

Jeśli między soczewkami znajduje się płaskorównoległa płytka szklana, to w niej kierunek omawianego promienia będzie mniej nachylony do osi niż w powietrzu, czyli przesunięcie w dół będzie mniejsze. Jest to więc przypadek pośredni między soczewkami stykającymi się a soczewkami rozsuniętymi.

443. Przyjmijmy najprostsze założenie, że siła powrotna jest proporcjonalna do wychylenia w potędze α, a siła tłumiąca – do prędkości w potędze β:

$$|F_p| = k|x|^{\alpha}, \quad |F_t| = q|v|^{\beta}.$$

Aby znaleźć stąd zależność okresu od amplitudy, można posłużyć się analizą wymiarową, pomijając na razie siłę tłumiącą (sądząc po niewielkim spadku amplitudy w ciągu jednego okresu, jest to uzasadnione). Dobieramy więc wykładniki u i w w zależności $T = c(k/m)^u A^w$, gdzie c jest stałą liczbową, a m – masą. Wymiarem stosunku k/m jest $m^{1-\alpha}s^{-2}$, zatem zgodność wymiarów nastąpi tylko dla $u = -1/2$, $w = (1-\alpha)/2$. Dane w tabeli nawet „na oko” wyraźnie wskazują na odwrotną proporcjonalność okresu do pierwiastka z amplitudy (czterokrotny spadek amplitudy spowodował dwukrotny wzrost okresu), tzn. $w = -1/2$, $\alpha = 2$.

W celu wyznaczenia współczynnika β trzeba oprócz analizy wymiarowej oprzeć się na fakcie, że dla małych wartości $\Delta A = A_n - A_{n+1}$ wielkość ta jest proporcjonalna do współczynnika q, gdyż mała zmiana trajektorii ruchu ciała jest proporcjonalna do siły, która spowodowała tę zmianę. Postępując jak poprzednio, dobieramy wykładniki y i z w zależności $\Delta A = c(q/m)(k/m)^y A^z$ i otrzymujemy $y = \beta/2 - 1$, $z = (\alpha+1)\beta/2 - \alpha + 1$. Na podstawie tabeli możemy ocenić z na około 1,2, gdyż 4-krotny spadek amplitudy towarzyszył około 5-krotnemu spadkowi ΔA, $\log 5/\log 4 \approx 1{,}2$. Stąd $\beta \approx 1{,}5$.