Chaos, widzę chaos...

Karolina KIELAK[*]

W *Delcie* 6(2007) E. Krępska pisała o chaosie pojawiającym się przy przekształcaniu odcinka w odcinek. Tym razem zajmiemy się przekształceniami działającymi na ciągach na przykładzie przekształcenia Bernoulliego. Jak pokażemy, można łatwo udowodnić, że jest ono „chaotyczne”. Tylko – co to właściwie znaczy?

Choć już w mitologii napisano „na początku był chaos”, w matematyce pojawił się on dopiero w drugiej połowie ubiegłego stulecia.

Cierpliwości. Zajmijmy się najpierw samym kandydatem. Przekształcenie Bernoulliego działa na nieskończonych ciągach $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$, gdzie $a_i \in \{0, 1\}$. Dziedziną jest więc zbiór $A = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots) : a_i \in \{0, 1\}, i \in \mathbb{N}\}$; element $a \in A$ będziemy nazywali punktem. W zbiorze A odległość między dwoma punktami mierzymy za pomocą wzoru

$$d(a, b) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a_i - b_i|}{2^i}.$$

Przekształcenie Bernoulliego, oznaczone jako $\sigma\colon A \to A$, „obcina” pierwszy wyraz, czyli $\sigma(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_2, a_3, \ldots)$. Przykładowo:

$$\sigma(0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, \ldots) = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, \ldots).$$

Ponadto jest ono ciągłe.

Dzięki temu, że po wykonaniu przekształcenia Bernoulliego dostajemy punkt należący do jego dziedziny, możemy badać jego iteracje, czyli złożenia z nim samym. Na przykład, podwójna iteracja na punkcie a, oznaczana jako $\sigma^2(a)$, jest równa $\sigma(\sigma(a))$. Mówimy, że punkt a jest okresowy o okresie k, jeśli po wykonaniu k-krotnej iteracji dostajemy ten sam punkt. Wszystkie punkty, które otrzymamy z a, wykonując kolejne przekształcenia, nazywamy orbitą punktu a.

Musimy powiedzieć jeszcze o jednej rzeczy – co to znaczy, że przekształcenie jest chaotyczne? Istnieje wiele różnych definicji. Autorem jednej z nich, obecnie najbardziej popularnej, jest Robert L. Devaney. Mówimy, że przekształcenie jest chaotyczne, jeśli spełnia trzy warunki:

- zbiór punktów okresowych jest gęsty w dziedzinie,
- istnieje orbita gęsta w dziedzinie,
- jest wrażliwe na małe zmiany warunków początkowych (czyli punktu, z którego startujemy).

Gęstość zbioru X w Y oznacza, że dowolnie blisko każdego punktu należącego do Y znajdują się punkty ze zbioru X.

Trzeci warunek należy rozumieć w ten sposób, że możemy wybrać taką odległość, iż gdy weźmiemy dwa bliskie punkty, to w wyniku wielokrotnego działania przekształcenia po jakimś czasie będą one od siebie oddalone przynajmniej o tę stałą. Jest to właśnie przyczyna problemów z symulacjami modeli i obserwacjami przyrody, bo pomiary warunków początkowych czy obliczenia komputerowe obarczone są zawsze błędem (dysponujemy tylko przybliżeniem dokładnej wartości), który może wywołać duże zmiany wyników w stosunku do przewidywanych. Zwróćmy uwagę, że ta definicja opisuje układy, które są rządzone przez prawo w pełni deterministyczne, tj. takie, że gdy znamy dokładnie warunki początkowe, to umiemy opisać całą ewolucję układu, natomiast fizyk, biolog czy ekonomista nigdy tak dokładnej wiedzy nie posiada i z tego powodu obserwuje zachowania w praktyce nieprzewidywalne.

Pokażemy teraz, że nasze przekształcenie spełnia wymienione warunki. Zauważmy najpierw, że punktami okresowymi są ciągi zbudowane z powtarzającego się bloku znaków. Długość tego bloku jest okresem punktu. Przykładowo, jeśli punkt $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots)$ ma okres 3, to skoro

$$\sigma^3(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots) = (a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, \ldots),$$

musi zachodzić $a_4 = a_1$, $a_5 = a_2$, $a_6 = a_3$, $a_7 = a_4 = a_1$ itd.

Musimy pokazać, że dowolnie blisko każdego ciągu $s \in A$ istnieje punkt okresowy. Weźmy więc $\varepsilon > 0$ oraz ustalmy n spełniające nierówność $2^{-n} < \varepsilon$.

[*]studentka, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Niech $s = (s_1, s_2, s_3, \ldots)$. Bystry Czytelnik może zgadnąć, jaki jest punkt okresowy bliski s, jeśli zastanowi się nad definicją odległości w przestrzeni A. Waga, z jaką wliczamy różnice na kolejnych miejscach badanych ciągów, jest coraz mniejsza. Oznacza to, że ciągi, które są blisko, nie mogą się różnić na miejscach początkowych. Wybierając $t = (s_1, s_2, \ldots, s_n, s_1, s_2, \ldots)$, dostaniemy $d(s,t) < 2^{-n} < \varepsilon$. Dostaliśmy więc jawny wzór na punkt okresowy dowolnie bliski dowolnego s, co właśnie oznacza gęstość zbioru punktów okresowych w dziedzinie.

Ciekawe, czy tak samo łatwo uda się nam znaleźć gęstą orbitę? Z jakiego ciągu musimy wystartować, żeby przez obcinanie pierwszych miejsc „podejść blisko" do każdego ciągu w dziedzinie? Chwila namysłu pozwala stwierdzić, że ten punkt musi mieć „zapisany" w sobie początek każdego możliwego punktu, czyli ciąg zer i jedynek o każdej długości. Uporządkujmy więc wszystkie skończone ciągi zerojedynkowe tak, aby były coraz dłuższe – najpierw jednoelementowe, czyli 0 i 1, potem dwuelementowe, czyli 00, 01, 10, 11, i tak dalej. Dostajemy

$$s^* = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots)$$

Jeśli $s \in A$, to znajdziemy takie r, że $d(\sigma^r(s^*), s) < 2^{-n} < \varepsilon$. Rzeczywiście, obcinając kolejne pierwsze liczby, otrzymamy początek dowolnego ciągu, czyli – zapisując formalnie – kolejne iteracje wykonywane na s^* tworzą gęstą orbitę.

Zostało nam sprawdzenie wrażliwości na małe zmiany warunków początkowych – weźmy więc takie $s, t \in A$, że $d(s,t) < \varepsilon$ i sprawdźmy, czy zawsze istnieje takie m, że po m iteracjach obrazy tych punktów będą daleko od siebie.

Z poprzednich rozważań wiemy już, że takie punkty powinny mieć na początku takie same wyrazy, a potem różne, czyli, na przykład, $t_i = s_i$ dla $i = 1, \ldots, n$, a następnie $t_{n+1} = 1 - s_{n+1}$. Wtedy $d(t,s) < \varepsilon$, ale $d(\sigma^{n+1}(t), \sigma^{n+1}(s)) \geqslant 1$. Przeprowadzenie rachunków pozostawiamy Dociekliwemu Czytelnikowi.

To jest już cały dowód – pokazaliśmy, że badane przekształcenie jest chaotyczne.

Podobnie łatwo można pokazać ciągłość tego przekształcenia. Dokładnemu Czytelnikowi proponujemy zastanowić się, w jaki sposób można oszacować $d(\sigma(s), \sigma(t))$ przez $d(s,t)$.

To jest właśnie chaos w rozumieniu matematyka. Okazuje się, że można go zobaczyć na własne oczy... Nie było tak strasznie, prawda?

Laboratorium Tatrzańskie (2)

Grzegorz DERFEL

Instytut Fizyki, Politechnika Łódzka

Deszcz padający do góry

Klimat tatrzański charakteryzuje się znaczną wilgotnością. Woda w stanie ciekłym występuje w atmosferze w postaci opadów, mgieł i oczywiście chmur. Gwałtowne, choć krótkotrwałe ulewy są spektakularne (i łatwiejsze do zaakceptowania niż trzydniowy kapuśniaczek). Łatwo zauważyć, że duże krople opadające podczas takich nawałnic uderzają w ziemię ze znacznie większą prędkością niż drobne kropelki mżawki. Zdarza się, że bardzo drobne, lecz jeszcze dostrzegalne gołym okiem kropelki, tworzące „gruboziarnistą" mgłę, unoszą się długo w powietrzu i trudno stwierdzić ich opadanie. Mleczne tumany, które unoszą się nad górskimi grzbietami, utworzone są z drobniutkich kropelek, których ruchem rządzą przede wszystkim wiatr i prądy powietrzne, a nie siła grawitacji. W Tatrach pogoda zmienia się dynamicznie, więc można być świadkiem wszystkich tych efektów podczas jednej wycieczki.

Powyższe zestawienie pokazuje, że prędkość ruchu kropel względem powietrza, jaką obserwujemy przy opadaniu w pobliżu gruntu, zależy od ich promienia. Jest to przejawem prawidłowości polegającej na tym, że siła oporu lepkiego F, jakiego doznaje kropla ze strony powietrza, rośnie z jej prędkością v. Dla małych kropelek i niewielkich prędkości zależność ta jest dobrze opisana wzorem Stokesa: $F(v) = 6\pi\mu r v$, gdzie μ jest współczynnikiem lepkości dynamicznej powietrza ($\mu = 1{,}78 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Ns/m^2}$ przy $20°\mathrm{C}$). Siła ta działa przeciwnie do prędkości i wraz z ciężarem decyduje o ruchu kropli względem powietrza. (Pomijamy tu wypór, jaki działa na kroplę zanurzoną w powietrzu,