Inspiracją do opracowania tego problemu było zadanie na XVIII Turniej Młodych Fizyków. Autor wraz ze szkolną drużyną z XIV LO im. S. Staszica w Warszawie reprezentowali Polskę na Międzynarodowym Turnieju Młodych Fizyków w Szwajcarii w 2005 r., gdzie zdobyli nagrodę III miejsca i na XVII MTMF w Australii w 2004 r., gdzie zajęli I miejsce. Opiekunem drużyny był mgr Stanisław Lipiński.

[1] E. Khular, K. Thyagarajan, A.K. Ghatak *A note on mirage formation*, Am. J. Phys., Vol. 45, No. 1, 01. (1977);

[2] R.W. Wood, *Some experiments on artificial mirages and tornadoes*, Phil. Mag. Vol. 47, No. 287, 04. (1899); tłumaczenie rosyjskie w *„Iskusstvennye mirazhi”*, Kvant 10, (1971).

[3] E.Tränkle, *Simulation of inferior mirages observed at the Halligen Sea*, Applied Optics, Vol. 37, No. 9, pp.1495-1505 (1998).

Twierdzenie *abc* dla wielomianów

*Jerzy BROWKIN**

Będziemy rozpatrywali wielomiany o współczynnikach liczbowych. Wielkie twierdzenie Fermata dla wielomianów mówi, że *jeżeli pewne niezerowe wielomiany f, g, h nie mają wspólnego dzielnika różnego od stałej i spełniają*

$$f^n + g^n = h^n,$$

gdzie $n \geqslant 3$, to wszystkie one są stałe.

Twierdzenie *abc* jest uogólnieniem wielkiego twierdzenia Fermata dla wielomianów. Niech

(1) $$F = f_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{k_r}, \quad G = g_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot g_s^{l_s}, \quad H = h_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot h_t^{m_t},$$

gdzie

(2) $$f_1, \ldots, f_r,\ g_1, \ldots, g_s,\ h_1, \ldots, h_t$$

są dowolnymi niezerowymi wielomianami, a wykładniki $k_1, \ldots, k_r$, $l_1, \ldots, l_s$, $m_1, \ldots, m_t$ są liczbami naturalnymi.

Twierdzenie *abc* dla wielomianów mówi, że *jeżeli wielomiany F, G, H spełniają równanie*

(3) $$F + G = H,$$

nie mają wspólnego dzielnika różnego od stałej oraz suma stopni wielomianów (2) *nie przekracza największego ze stopni wielomianów F, G, H, to wielomiany F, G, H są stałe.*

Dowód twierdzenia *abc* nie jest trudny. Podamy najpierw pewne własności pochodnej wielomianu, które będą wykorzystane w dowodzie. Zachodzą wzory:

$$(pq)' = p'q + pq', \qquad (p^k)' = kp'p^{k-1}.$$

Wobec tego $p \cdot (p^k)' = kp' \cdot p^k$. Podobnie

$$\left(p_1^{k_1} p_2^{k_2}\right)' = k_1 p_1' p_1^{k_1-1} p_2^{k_2} + k_2 p_2' p_1^{k_1} p_2^{k_2-1}$$

i stąd

$$(p_1 p_2) \cdot \left(p_1^{k_1} p_2^{k_2}\right)' = (k_1 p_1' p_2 + k_2 p_1 p_2') \cdot (p_1^{k_1} p_2^{k_2}).$$

Ogólniej, dla większej liczby czynników mamy

$$(p_1 \cdot \ldots \cdot p_n) \cdot \left(p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}\right)' = P_1 \cdot \left(p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}\right),$$

gdzie

(4) $$P_1 = k_1 p_1' p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + k_2 p_1 p_2' p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + \ldots + k_n p_1 \cdot \ldots \cdot p_{n-1} p_n'.$$

Inaczej mówiąc, dla dowolnego wielomianu P zapisanego w postaci $P = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$ mamy

(5) $$P_0 P' = P_1 P,$$

Rozwiązanie zadania M 1221.
Oznaczmy przez a pierwszą, a przez b ostatnią cyfrę w zapisie dziesiętnym liczby k-cyfrowej n. Ponieważ liczba $3n$ jest także k-cyfrowa, więc liczba a równa się 1, 2 lub 3. Ponadto

$$a \cdot 10^{k-1} < n < (a+1) \cdot 10^{k-1}$$

oraz

$$b \cdot 10^{k-1} < 3n < (b+1) \cdot 10^{k-1}.$$

Stąd w szczególności otrzymujemy

$$(b+1) \cdot 10^{k-1} > 3n > 3a \cdot 10^{k-1}$$

oraz

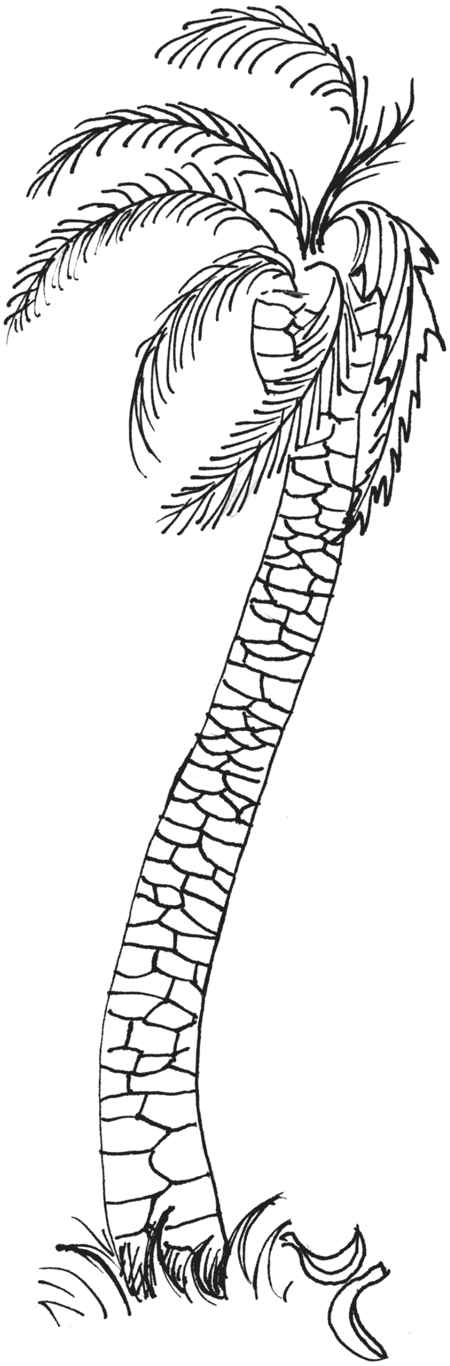
$$b \cdot 10^{k-1} < 3n < 3(a+1) \cdot 10^{k-1},$$

czyli $b + 1 > 3a$ oraz $b < 3a + 3$.

Zauważmy ponadto, że cyfrą jedności liczby $3b$ jest liczba a. Podstawiając $a = 1, 2, 3$, sprawdzamy bezpośrednio, że warunek ten nie da się pogodzić z otrzymanymi nierównościami. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że opisana w treści zadania liczba nie istnieje.

*Instytut Matematyczny PAN

Rozwiązanie zadania F 725.
Po przejściu przez każdy milimetr grubości kadmu liczba neutronów spada o 15 %. Zatem po 8 milimetrach ich liczba spadnie do: $(0,85)^8 \approx 0,27$, czyli 27 %.



gdzie $P_0 = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$, a wielomian P_1 jest określony wzorem (4). Zauważmy, że $\mathrm{st}P' = \mathrm{st}P - 1$, i wobec tego z (5) wynika, że $\mathrm{st}P_1 = \mathrm{st}P_0 - 1$.

Jeżeli wielomian P jest stałą różną od zera, to przyjmujemy $P_0 = 1,\ P_1 = 0$. Wtedy również wzór (5) zachodzi.

Teraz przystępujemy do dowodu twierdzenia *abc*. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że wielomiany F, G, H podane w twierdzeniu spełniają

$$\mathrm{st}F \geqslant \mathrm{st}G \geqslant \mathrm{st}H.$$

Przypuśćmy, że nie wszystkie wielomiany F, G, H są stałe. Wtedy $\mathrm{st}F > 0$.

Obliczając pochodne obu stron równości (3), otrzymamy

$$F' + G' = H'.$$

Zastosujemy do tej równości wzór (5) przy $P = F, G$ i H. W tym celu pomnożymy obie jej strony przez wielomian $F_0G_0H_0$, gdzie na mocy (1)

$$F_0 = f_1 \cdot \ldots \cdot f_r, \quad G_0 = g_1 \cdot \ldots \cdot g_s, \quad H_0 = h_1 \cdot \ldots \cdot h_t. \tag{6}$$

Mamy więc

$$F_0F' \cdot G_0H_0 + G_0G' \cdot F_0H_0 = H_0H' \cdot F_0G_0,$$

i korzystając z (5) oraz (3), otrzymamy

$$F_1F \cdot G_0H_0 + G_1G \cdot F_0H_0 = H_1H \cdot F_0G_0 = H_1F \cdot F_0G_0 + H_1G \cdot F_0G_0.$$

Przenosimy wyrazy zawierające F na jedną stronę, a wyrazy zawierające G na drugą:

$$F(F_1G_0H_0 - H_1F_0G_0) = G(H_1F_0G_0 - G_1F_0H_0). \tag{7}$$

Z założenia i wzoru (3) wynika, że wielomiany F i G nie mają wspólnego czynnika różnego od stałej. Wobec tego z (7) otrzymujemy, że wielomian F jest dzielnikiem wielomianu $H_1F_0G_0 - G_1F_0H_0$.

Wiemy, że $\mathrm{st}G_1 = \mathrm{st}G_0 - 1$ i $\mathrm{st}H_1 = \mathrm{st}H_0 - 1$. Wobec tego stopnie wielomianów $H_1F_0G_0$ i $G_1F_0H_0$ są równe $\mathrm{st}(F_0G_0H_0) - 1$, a stopień ich różnicy nie przekracza tej liczby.

Z powyższego wynika, że $\mathrm{st}F \leqslant \mathrm{st}(F_0G_0H_0) - 1 < \mathrm{st}(F_0G_0H_0)$. Jest to sprzeczne z założeniem twierdzenia, ponieważ na mocy (6) wielomian $F_0G_0H_0$ jest iloczynem wielomianów (2).

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że wielomiany F, G, H są stałe.

Uwagi i pytania.

1. Twierdzenie *abc* dla wielomianów udowodnił (w inny sposób) W.W. Stothers w 1981 roku.

2. Gdzie w dowodzie wykorzystaliśmy przyjęte założenie, że nie wszystkie wielomiany F, G, H są stałe ?

3. O wielomianach niezerowych $f_1, \ldots, f_r$ niczego nie zakładaliśmy. Na przykład ani tego, że są nierozkładalne, ani że nie mają wspólnych czynników różnych od stałej, itp. Są to zupełnie dowolne niezerowe wielomiany, być może stałe. To samo dotyczy wielomianów $g_1, \ldots, g_s$ i $h_1, \ldots, h_t$.

4. Pozostawiam dla Czytelnika jako łatwe zadanie wyprowadzenie wielkiego twierdzenia Fermata dla wielomianów z twierdzenia *abc*.

5. Z twierdzenia *abc* wynika też następujące twierdzenie:

Jeżeli liczby naturalne k, m, n są większe od 2, a wielomiany f i g nie są stałe i nie mają wspólnego dzielnika różnego od stałej, to dla żadnego wielomianu h nie zachodzi równość

$$f^k + g^m = h^n.$$

Wyprowadzenie tego wniosku z twierdzenia *abc* również pozostawiam dla zainteresowanych Czytelników jako niezbyt trudne zadanie.