Prawdziwe okazuje się też twierdzenie odwrotne do twierdzenia 3, mówiące, że jeżeli wszystkie liczby (pomijając skrajne jedynki) w poziomym n-tym rzędzie trójkąta Pascala są podzielne przez liczbę pierwszą p, to n jest potęgą o wykładniku całkowitym dodatnim liczby p.

Okazuje się, że odpowiedź na postawione na wstępie pytanie dotyczące liczb złożonych jest negatywna.

Twierdzenie 4. *Jeżeli r jest liczbą złożoną, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, $0 < k < n$, że liczba $\binom{n}{k}$ jest niepodzielna przez r.*

Tak więc nie istnieje w trójkącie Pascala taki rząd poziomy, że (pomijając skrajne jedynki) wszystkie liczby w nim występujące są podzielne przez liczbę złożoną r.

Twierdzenie 1 daje się uogólnić na wszystkie liczby pierwsze, tzn. prawdą jest, że wszystkie liczby postaci $\binom{p^m-1}{k}$ są niepodzielne przez p. Co więcej, zachodzą twierdzenia mocniejsze.

Twierdzenie 5.1. *Jeżeli p jest liczbą pierwszą, $m \in \mathbb{N}$, k zaś jest liczbą parzystą spełniającą warunek $0 \leqslant k \leqslant p^m - 1$, to*

$$\binom{p^m-1}{k} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Twierdzenie 5.2. *Jeżeli p jest liczbą pierwszą, $m \in \mathbb{N}$, k zaś jest liczbą nieparzystą spełniającą warunek $1 \leqslant k \leqslant p^m - 1$, to*

$$\binom{p^m-1}{k} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Dowód twierdzenia 5.1 przebiega przez indukcję i wykorzystuje wzór Pascala oraz twierdzenie 3. Twierdzenie 5.2 jest natomiast prostą konsekwencją twierdzeń 3 i 5.1.

Dla $p > 2$ okazuje się, że nie tylko rzędy o numerach $p^m - 1$ zawierają wyłącznie liczby niepodzielne przez p (rysunek na okładce).

Twierdzenie 6. *Wszystkie liczby*

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$$

są niepodzielne przez liczbę pierwszą p wtedy i tylko wtedy, *gdy dla pewnych liczb m, t, spełniających warunki*: $m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}$, $0 < t < p$, *zachodzi*

$$n = tp^m - 1 \quad \textit{albo} \quad n < p.$$

Jednym z ciekawszych twierdzeń związanych z trójkątem Pascala, z którym się spotkałem, jest związek trójkąta Pascala z liczbami Fibonacciego, który prowadzi ostatecznie do formuły:

$$(n+1) \text{ wyraz ciągu Fibonacciego} = \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n-i}{i}.$$

Zainteresowanego tym związkiem Czytelnika odsyłam na stronę Politechniki Gdańskiej

`www.mif.pg.gda.pl/kmd/topp/Seminarium2.pdf`.

Zachęcam Czytelnika do odnalezienia dowodów twierdzeń zawartych w tej pracy, które byłyby oparte jedynie na samopodobieństwie trójkąta Pascala.

Konkurs zadań astronomicznych

Na rozwiązania zadań A 13 i A 14 czekamy do 1 sierpnia 2009 r. (decyduje data stempla pocztowego) pod adresem:

Centrum Astronomiczne
im. Mikołaja Kopernika
ul. Bartycka 18
00-716 Warszawa

z dopiskiem na kopercie „Konkurs *Delty*".

A 13. Kosmonauta na powierzchni Ziemi może skoczyć w miejscu, do góry, na wysokość 70 cm. Jak wysoko skoczy ten sam kosmonauta na Księżycu, jeżeli wiadomo, że pole grawitacyjne na Księżycu jest 6 razy słabsze niż na Ziemi? [1 pkt]

A 14. Pokazać, dlaczego promieniowanie rentgenowskie nie dociera do powierzchni Ziemi. W tym celu należy wyznaczyć tak zwaną głębokość optyczną atmosfery, τ, która określa czynnik osłabienia przechodzącego promieniowania. Wielkość ta jest równa

$$\tau = n \cdot H \cdot \sigma,$$

gdzie n jest średnią gęstością liczbową cząstek w atmosferze, H jest grubością atmosfery, a σ jest przekrojem czynnym na rozpraszanie fotonu. Przekrój czynny σ dla fotonów rentgenowskich jest w przybliżeniu równy 10^{-24} cm^2. Brakujące wielkości należy wziąć z tablic. [2 pkt]

Rozwiązania zadań z numeru 5/2009

A 9. Jasność wyrażamy wzorem $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$, stąd stosunek jasności brązowego karła do jasności Słońca wynosi $L/L_\odot = (R/R_\odot)^2 (T/T_\odot)^4$. Po podstawieniu odpowiednich wielkości liczbowych otrzymujemy $L/L_\odot \approx 3{,}497 \cdot 10^{-5}$.

A 10. Moc promieniowania wynosi $P = E/t$, stąd $t = E/P$. Wykorzystując warunki zadania, otrzymujemy $t = 0{,}13 \cdot (N/4) \cdot E_r/P$, gdzie $E_r = 27\,\mathrm{MeV}$ jest energią wydzieloną w pojedynczej reakcji syntezy 4 jąder wodoru w jądro helu, $N = M_w/m_H$ (M_w to masa wodoru w gwieździe, a m_H masa jądra wodoru) jest liczbą jąder wodoru. Podstawiając wielkości liczbowe, otrzymujemy

$$t = 3{,}095 \cdot 10^{17}\,\mathrm{s} = 9{,}8\,\text{mld lat},$$

a porównując z wiekiem Słońca dostajemy $t/t_\odot = 2{,}18$.