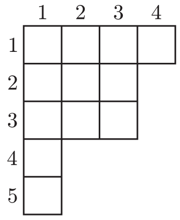
Tableau Younga i prawo haczykowe

*Łukasz BIENIASZ-KRZYWIEC**

Prawo haczykowe to bardzo ciekawy wzór kombinatoryczny na liczbę różnych tableaux Younga (o tym, co to za stwory, za chwilę). Niniejszy artykuł jest poświęcony pięknemu dowodowi prawa haczykowego. Dowodowi, który jest oparty na idei wykraczającej daleko poza przyziemne schematy, sięgającej królestwa natchnienia i twórczości, a jednocześnie zaskakująco prostej i zrozumiałej.

Tableau [wym. tablo, lm. tableaux, z tą samą wymową] – po francusku tablica.

Każdą liczbę naturalną n można przedstawić (często na wiele sposobów) w postaci skończonej sumy dodatnich liczb całkowitych $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m$, gdzie $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_m$. Takie przedstawienie nazywamy *podziałem* liczby n i oznaczamy $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \vdash n$ lub w skrócie $\lambda \vdash n$. Podziały liczb naturalnych wygodnie jest reprezentować graficznie w postaci *diagramów Ferrersa* (zwanych czasem *diagramami Younga*). Na przykład podziałowi $12 = 4 + 3 + 3 + 1 + 1$ odpowiada diagram z rysunku 1. Mówiąc bardziej formalnie, i-ty wiersz diagramu dla podziału $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \vdash n$ składa się z λ_i kwadratów (komórek). Komórkę leżącą na przecięciu i-tego wiersza oraz j-tej kolumny oznaczamy (i, j).

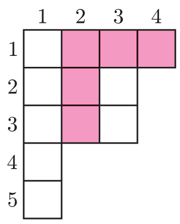


Rys. 1. Diagram Ferrersa kształtu $(4, 3, 3, 1, 1)$.

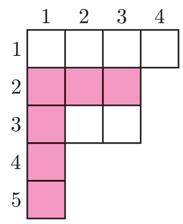
	1	2	3	4
1	1	3	6	10
2	2	5	9	
3	4	8	12	
4	7			
5	11			

Rys. 2. Przykład standardowego tableau Younga kształtu $(4, 3, 3, 1, 1)$.

Tableau Younga otrzymujemy poprzez wypełnienie wszystkich komórek pewnego diagramu Ferrersa liczbami naturalnymi. Mówimy, że tableau ma *kształt* $\lambda \vdash n$, jeśli zostało uzyskane z diagramu odpowiadającego podziałowi $\lambda \vdash n$. Tableau kształtu $\lambda \vdash n$ nazywamy *standardowym*, gdy zawiera wszystkie liczby ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ oraz jego każdy wiersz czytany z lewej do prawej i każda kolumna czytana z góry do dołu tworzą ciąg rosnący (przykład na rys. 2). My będziemy zajmować się wyłącznie tableaux standardowymi.



Rys. 3. Haczyk komórki $(1, 2)$.



Rys. 4. Haczyk komórki $(2, 1)$.

Interesujący nas problem kombinatoryczny wyraża się następującym pytaniem. *Na ile sposobów można rozmieścić liczby $1, 2, \ldots, n$ w komórkach diagramu Ferrersa odpowiadającego podziałowi $\lambda \vdash n$ tak, aby uzyskać standardowe tableau Younga?*

Aby sformułować odpowiedź, potrzebna nam będzie jeszcze jedna definicja. Każdej komórce (i, j) diagramu przypisujemy *haczyk* H_{ij}, czyli zbiór komórek (a, b), takich że $a = i$ oraz $b \geqslant j$ lub $a \geqslant i$ oraz $b = j$. *Rozmiar* h_{ij} haczyka to nic innego jak liczba komórek w zbiorze H_{ij} (patrz przykłady na rys. 3, 4 i 5).

	1	2	3	4
1	8	5	4	1
2	6	3	2	
3	5	2	1	
4	2			
5	1			

Rys. 5. Rozmiary haczyków.

Prawo haczykowe (Frame–Robinson–Thrall). *Jeśli $\lambda \vdash n$ jest podziałem n, to liczba standardowych tableaux Younga kształtu $\lambda \vdash n$ wynosi*

$$f(\lambda) = \frac{n!}{\prod h_{ij}},$$

gdzie iloczyn w mianowniku przebiega wszystkie komórki diagramu Ferrersa odpowiadającego $\lambda \vdash n$.

Co ciekawe, diagram Ferrersa z wpisanymi w komórki długościami haczyków prawie nigdy nie tworzy standardowego tableau Younga.

Polecam Czytelnikowi poeksperymentowanie z prawem haczykowym także na kilku mniejszych przykładach, np. $(3, 2) \vdash 5$.

Zanim przejdziemy do uzasadnienia, przyjrzyjmy się przykładowi tableau kształtu $(n, n) \vdash 2n$. Diagram Ferrersa odpowiadający podziałowi $(n, n) \vdash 2n$ to zwykły prostokąt o szerokości n i wysokości 2. Długości haczyków komórek z tego diagramu są widoczne na rysunku 6. Co w tym przypadku mówi prawo haczykowe? Wszystkich różnych tableaux kształtu $(n, n) \vdash 2n$ jest

$$\frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n},$$

a to jest przecież n-ta liczba Catalana! Wobec tego standardowych tableaux kształtu $(n, n) \vdash 2n$ jest dokładnie tyle samo, co poprawnych słów nawiasowych długości $2n$. Znając ten wynik, można łatwo skonstruować wzajemnie jednoznaczne przekształcenie przypisujące tableaux słowom nawiasowym i na odwrót. Zostawiam to, jako nietrudne ćwiczenie, dla Ciebie, Czytelniku. Jednak *chapeau bas* przed tymi, którzy zauważyli to wcześniej.

	1	2	3		$n-2$	$n-1$	n
1	$n+1$	n	$n-1$	$\ldots$	4	3	2
2	n	$n-1$	$n-2$		3	2	1

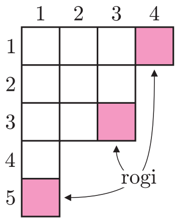
Rys. 6. Rozmiary haczyków.

Poprawne słowo nawiasowe to napis złożony z nawiasów otwierających '(' i zamykających ')', w którym każdemu nawiasowi otwierającemu możemy jednoznacznie przyporządkować jakiś nawias zamykający.

Jak widać, odpowiedzią na postawione na początku pytanie jest formuła wyrażająca się pięknym, zwartym wzorem. Ale skąd wzięły się w niej długości haczyków? Okazuje się, że to pytanie długo pozostawało bez odpowiedzi. Pierwszy dowód, wymyślony przez Robinsona i Frame'a oraz niezależnie Thralla tej samej majowej nocy 1953 roku, bazuje na skomplikowanych metodach

*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

algebraicznych i nie wyjaśnia fenomenu haczyków. Poniżej przedstawiamy krótki probabilistyczny dowód, zaproponowany przez Greene'a, Nijenhuisa i Wilfa dopiero w 1979 roku. Jego centralnym punktem jest eksperyment losowy, w którego definicji pojawiają się haczyki.



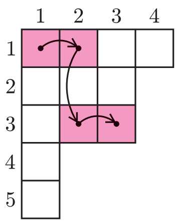
Rys. 7. $F(4,3,3,1,1) = F(3,3,3,1,1) + F(4,3,2,1,1) + F(4,3,3,1)$.

Na początek zauważmy, że w każdym standardowym tableau liczba n musi wystąpić w którymś z *rogów*, czyli komórek, które leżą na końcu zarówno swojego wiersza, jak i kolumny. Usunięcie rogu powoduje powstanie mniejszego tableau. Przez $F(\lambda) = F(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ oznaczmy liczbę standardowych tableaux kształtu $\lambda \vdash n$. Powyższa obserwacja daje nam prostą zależność rekurencyjną na $F(\lambda)$ (rys. 7):

$$F(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \begin{cases} \sum_\alpha F(\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha - 1, \ldots, \lambda_m) & \text{gdy } \lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_\alpha \geqslant \ldots \geqslant \lambda_m, \\ 1 & \text{gdy } m = 1, \\ 0 & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

co w skrócie zapisujemy

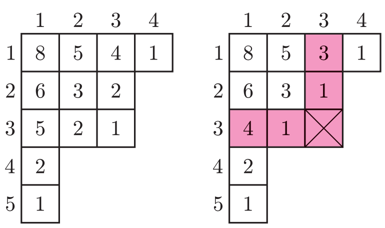
$$F = \sum_\alpha F_\alpha, \quad \text{gdzie} \quad F_\alpha = F(\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha - 1, \ldots, \lambda_m).$$



Rys. 8. Ścieżka $(1,1) \to (1,2) \to (3,2) \to (3,3)$.

Zauważmy, że tak naprawdę sumujemy tylko po rogach, bo składniki, dla których $\lambda_{\alpha+1} > \lambda_\alpha - 1$, są równe 0. Skoro mamy zależność rekurencyjną, to możemy udowodnić naszą formułę haczykową (tj. wzór $F(\lambda) = f(\lambda)$) przez indukcję względem rozmiaru tableau. Dla $n = 1$ się zgadza. Ale co dalej? Gwóźdź programu tkwi w zweryfikowaniu równości

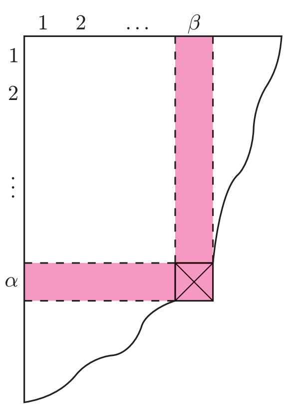
$$1 = \sum_\alpha \frac{f_\alpha}{f}$$



Rys. 9. W zacieniowanych komórkach zmniejszamy rozmiary haczyków.

(gdzie f i f_α definiujemy analogicznie do F i F_α) poprzez nadanie jej probabilistycznej interpretacji. W tym celu rozważmy następujący eksperyment. W pierwszym kroku wybieramy z diagramu Ferrersa losową komórkę (a_1, b_1). Prawdopodobieństwo wybrania każdej komórki jest jednakowe, równe $1/n$. Następnie wybieramy losową komórkę (a_2, b_2) spośród reszty komórek należących do haczyka $H_{a_1 b_1}$, każdą z prawdopodobieństwem $1/(h_{a_1 b_1} - 1)$. Kolejna komórka jest wybierana losowo spośród pozostałych komórek z $H_{a_2 b_2}$ itd. Kontynuujemy ten proces, aż trafimy do jakiegoś rogu (a_k, b_k) (rys. 8). Ciąg komórek $(a_1, b_1) \to (a_2, b_2) \to \ldots \to (a_k, b_k)$ wybranych w toku losowania będziemy nazywali *ścieżką*. Powyższy eksperyment przypisuje konkretnemu diagramowi Ferrersa kształtu $\lambda \vdash n$ przestrzeń probabilistyczną (Ω, P). Zdarzenia elementarne to ścieżki. Prawdopodobieństwo ścieżki wyraża się wzorem

$$P((a_1, b_1) \to \ldots \to (a_k, b_k)) = \frac{1}{n} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{h_{a_i b_i} - 1}.$$



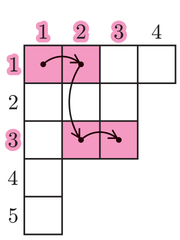
Rys. 10

Niech $P(\alpha, \beta)$ oznacza prawdopodobieństwo, że losowa ścieżka kończy się w rogu (α, β). Każda ścieżka kończy się w którymś rogu, więc oczywiście $1 = \sum_{(\alpha,\beta)} P(\alpha, \beta)$. Wobec tego, gdyby udało nam się udowodnić wzór

$$P(\alpha, \beta) = \frac{f_\alpha}{f},$$

to zakończylibyśmy dowód. Spróbujmy. Na początek zauważmy, że gdy (α, β) jest pewnym rogiem, to wówczas (patrz rys. 9 i 10)

$$\text{(1)} \qquad \frac{f_\alpha}{f} = \frac{1}{n} \prod_{1 \leqslant i < \alpha} \frac{h_{i\beta}}{h_{i\beta} - 1} \prod_{1 \leqslant j < \beta} \frac{h_{\alpha j}}{h_{\alpha j} - 1} = \\ = \frac{1}{n} \prod_{1 \leqslant i < \alpha} \left(1 + \frac{1}{h_{i\beta} - 1}\right) \prod_{1 \leqslant j < \beta} \left(1 + \frac{1}{h_{\alpha j} - 1}\right).$$



Rys. 11. $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$.

Musimy jakoś pokazać, że $P(\alpha, \beta)$ równe jest właśnie tyle. Nie obejdziemy się bez jeszcze jednej definicji. Niech S będzie ścieżką

$$(a, b) = (a_1, b_1) \to \ldots \to (a_k, b_k) = (\alpha, \beta)$$

kończącą się w jakimś rogu tableau. *Rzut* ścieżki S to para zbiorów $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ (numery wierszy) oraz $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ (numery kolumn) – patrz rysunek 11. Niech $P(A, B \,|\, a, b)$ oznacza prawdopodobieństwo, że losowa ścieżka zaczynająca się w komórce (a, b) ma rzut A, B. Wartość $P(\alpha, \beta)$ możemy teraz obliczyć, korzystając z odpowiednich prawdopodobieństw warunkowych:

$$P(\alpha,\beta)=\frac{1}{n}\sum P(A,B\,|\,a,b). \tag{2}$$

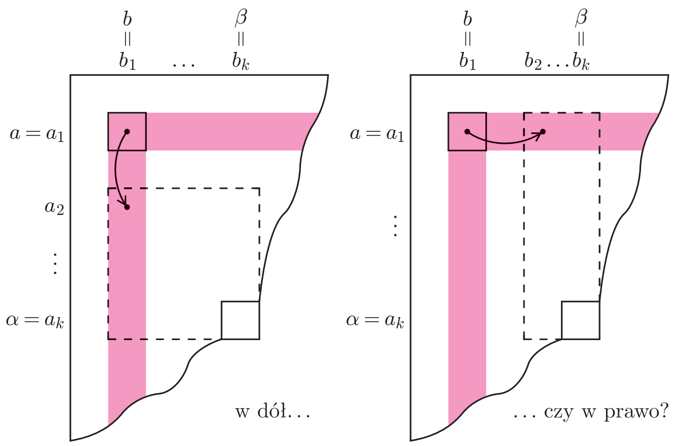
W powyższym wzorze sumujemy po takich A,B,a,b, że $A\subseteq\{1,2,\ldots,\alpha\}$, $B\subseteq\{1,2,\ldots,\beta\}$ oraz $a=\min A$, $b=\min B$ i $\alpha=\max A$, $\beta=\max B$. Aby móc uczynić użytek z zależności (2), posłużymy się następującym wzorem:

$$P(A,B\,|\,a,b)=\prod_{i\in A,\,i<\alpha}\frac{1}{h_{i\beta}-1}\prod_{j\in B,\,j<\beta}\frac{1}{h_{\alpha j}-1}. \tag{3}$$

Pusty iloczyn (iloczyn niezawierający żadnego czynnika) jest równy 1.

Udowodnimy go przez indukcję względem długości ścieżki k. Dla $k=1$ się zgadza (dlaczego?). Gdy $k>1$, to ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite otrzymujemy równość

$$P(A,B\,|\,a,b)=\frac{1}{h_{ab}-1}\cdot\bigl(P(A\setminus\{a\},B\,|\,a_2,b_1)+P(A,B\setminus\{b\}\,|\,a_1,b_2)\bigr).$$



Rys. 12

Pierwszy składnik odpowiada wybraniu drogi w dół, a drugi – drogi w prawo w haczyku H_{ab} (rys. 12). Zarówno $A\setminus\{a\}$, B, jak i A, $B\setminus\{b\}$ odpowiadają ścieżkom długości $k-1$, zatem na mocy indukcji mamy

$$P(A\setminus\{a\},B\,|\,a_2,b_1)=(h_{a\beta}-1)\cdot\Gamma$$

oraz

$$P(A,B\setminus\{b\}\,|\,a_1,b_2)=(h_{\alpha b}-1)\cdot\Gamma,$$

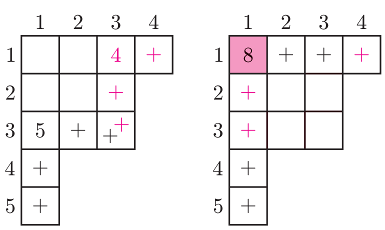
gdzie Γ to prawa strona w równości (3). Wobec tego

$$P(A,B\,|\,a,b)=\frac{1}{h_{ab}-1}\cdot((h_{a\beta}-1)+(h_{\alpha b}-1))\cdot\Gamma=\Gamma,$$

bo, jak pokazuje prosty argument rysunkowy (patrz rys. 13),

$$h_{ab}-1=(h_{a\beta}-1)+(h_{\alpha b}-1).$$

To kończy dowód wzoru (3).



Rys. 13. $8-1=(4-1)+(5-1)$.

Jeżeli teraz wstawimy wynik ze wzoru (3) do równości (2), to otrzymamy:

$$P(\alpha,\beta)=\frac{1}{n}\sum P(A,B\,|\,a,b)=\frac{1}{n}\sum\prod_{i\in A,i<\alpha}\frac{1}{h_{i\beta}-1}\prod_{j\in B,j<\beta}\frac{1}{h_{\alpha j}-1}=$$

$$=\frac{1}{n}\prod_{1\leqslant i<\alpha}\left(1+\frac{1}{h_{i\beta}-1}\right)\prod_{1\leqslant j<\beta}\left(1+\frac{1}{h_{\alpha j}-1}\right)=\frac{f_\alpha}{f}.$$

Rzeczywiście, po wymnożeniu prawej strony we wzorze (1) uzyskujemy sumę, której składniki są dokładnie postaci (3). Czyli $P(\alpha,\beta)=f_\alpha/f$. To kończy dowód!

Wyniki XXVI Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków, Bystra, 4–7 VI 2009

Konkurs polega na przedstawieniu opracowania jednego z tematów zaproponowanych przez Jury (wraz z bibliografią) lub tematu własnego oraz – w przypadku zakwalifikowania się do finału – krótkim, publicznym zreferowaniu tego opracowania.

W roku 2009/10 zaproponowane przez Jury tematy to:

niezmienniki topologiczne, zdarzenia nieprawdopodobne, moje ulubione krzywe, liczby pierwsze, obliczanie „okropnych" sum nieskończonych, twierdzenia typu Ramseya, Enigma i inne takie, algorytmy przybliżone, różne systemy numeracji, potęga punktu względem okręgu.

Sejmiki organizuje Pracownia Matematyki i Informatyki Pałacu Młodzieży w Katowicach we współpracy z Uniwersytetem Śląskim; `www.spinor.edu.pl`

Jury w składzie: prof. dr hab. Maciej Sablik – przewodniczący, dr Marian Podhorodyński – zastępca przewodniczącego, dr Lech Bartłomiejczyk, dr Tomasz Bielaczyc, dr Adrian Brückner, dr Włodzimierz Fechner, mgr Żywilla Fechner, dr Maria Górnioczek, dr Erwin Kasparek, mgr Renata Kawa, mgr Tomasz Kochanek, dr hab. Mieczysław Kula, dr Michał Machura, dr Janusz Morawiec, dr Barbara Przebieracz, dr Anna Szczerba-Zubek, przyznało

I nagrodę **Janowi Wegehauptowi** z VIII LO w Katowicach za pracę *Słów kilka o uprawianiu geometrii na powierzchni sześcianu*;

II nagrodę **Tomaszowi Smolarczykowi** z I LO w Pszczynie za pracę *Rozwiązywanie równań wielomianowych*;

III nagrodę **Patrycji Osadnik** z I LO w Lublińcu za pracę *Geometria w geografii*;

IV nagrodę **Krystianowi Gruszczyńskiemu** z I LO w Koszalinie za pracę *Matematyka i origami*.

W głosowaniu na najlepszą prezentację nauczyciele nagrodzili **Jana Wegehaupta**, a uczniowie **Adama Śmiałkowskiego**, obu z VIII LO w Katowicach.