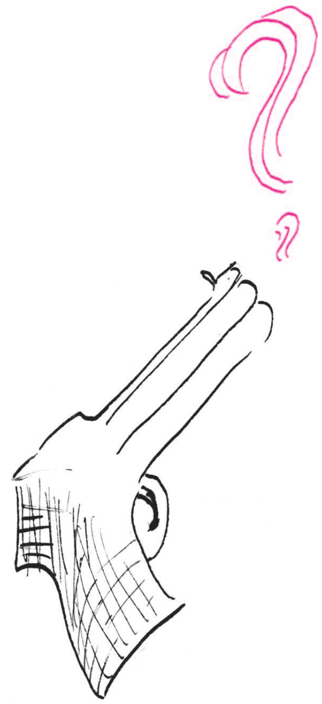
Mafia, zdradziecka parzystość oraz π

Piotr MIGDAŁ[*]

Mafia to jedna z towarzyskich gier psychologicznych. Jej osią jest wzajemne zwalczanie się dwóch grup – mafii i miastowych. Członkowie mafii znają się wzajemnie i mają dodatkowe możliwości działania, za to miastowi stanowią liczniejszą grupę.

Na początku gry każdy uczestnik ciągnie los, czy zostanie miastowym, czy członkiem mafii. Rozgrywka jest podzielona na naprzemienne fazy dnia i nocy, kończy się zaś, gdy przy życiu pozostanie tylko jedna grupa. Podstawowe działania w trakcie dnia to jawna dyskusja i linczowanie uczestników wybranych w drodze większościowego głosowania, w nocy zaś – tajne naradzanie się mafii i zabijanie przez nią miastowego.



Można bawić się, grając w mafię lub... zabawić się w jej matematyczne modelowanie.

Skupimy się na najprostszej wersji gry w mafię, w której mamy jednego członka mafii oraz c miastowych, bez żadnych dodatkowych postaci (czyli sumarycznie $c+1$ uczestników). Pominiemy część psychologiczną. W szczególności założymy, że mafiozo nie ujawni w czasie gry swojej tożsamości na drodze przejęzyczenia, przybrania koloru buraka ani jakiejkolwiek innej. Tym samym żaden miastowy nie ma przesłanek wnosić, kto może być w mafii, i głosuje za linczowaniem kogokolwiek oprócz siebie. Oczywiście, mafiozo głosuje na dowolnego miastowego. W tym przypadku opis gry znacznie się upraszcza, gdyż w ciągu dnia zostaje zlinczowana losowa osoba. W trakcie nocy zawsze ginie jeden miastowy.

Gdy mamy do czynienia z jednoosobową mafią, prawdopodobieństwo jej wygrania to nic innego, jak iloczyn prawdopodobieństw tego, że każdego dnia zostanie zlinczowany miastowy. Dla ustalenia uwagi, zaczynamy grę od fazy dnia. Otrzymujemy wzór na prawdopodobieństwo w wygrania mafii w zależności od początkowej liczby miastowych c:

$$w(c) = \frac{c}{c+1} \cdot \frac{c-2}{c-1} \cdot \frac{c-4}{c-3} \cdot \ldots = \frac{c!!}{(c+1)!!}.$$

Możemy przyjąć, że zaczynamy grę od dnia, nie tracąc ogólności – równie dobrze moglibyśmy zacząć grę w nocy i dodać jednego miastowego, który zostanie w trakcie niej zabity.

$n!!$ to n dwusilnia, czyli iloczyn co drugiej liczby całkowitej dodatniej, kończący się na n. Np. $6!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$, $7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

Zdradziecka parzystość

Powyższy wzór ma pewne, zależne od parzystości c, własności, niejako zamaskowane w dwusilniach. O ile dodanie dwóch miastowych ewidentnie zmniejsza szansę wygrania mafii, czyli $w(c+2) < w(c)$, tak już być nie musi w przypadku dodania tylko jednego miastowego. Jak się okazuje, dodając parzystego miastowego, zwiększamy szansę wygrania mafii! Dla ilustracji tego zjawiska posłużmy się prostym przykładem.

Rozważmy sytuację, w której na starcie mamy jednego mafiozo i jednego miastowego. Mafia wygrywa tylko wtedy, gdy zostanie zlinczowany miastowy. Z uwagi na oczywisty remis wybór ofiary jest dokonywany np. na podstawie rzutu monetą, co daje $w(1) = \frac{1}{2}$. Gdy na starcie jest jeden mafiozo i dwóch miastowych, również mafia wygrywa tylko wtedy, gdy zostanie zlinczowany miastowy (drugiego dobije w nocy). Tym razem trudniej ją upolować i $w(2) = \frac{2}{3}$.

Można podejrzewać, że natknęliśmy się na zjawisko wynikające z doboru konkretnych warunków brzegowych (tj. ustalenia, że w przypadku remisu ginie losowa osoba, a nie np. miastowy) lub rozważania zbyt małej liczby miastowych. Pierwszą z możliwości z łatwością rozpatrzy Czytelnik Dociekliwy, drugą opiszę poniżej.

Udowodnimy, że zawsze dodanie parzystego mieszkańca zwiększa szanse wygrania mafii. Przy szacowaniu różnicy $w(2k) - w(2k-1)$ będziemy korzystać z niezbyt skomplikowanej nierówności

$$\sqrt{(n+1)(n-1)} < n.$$

[*]student, Kolegium Międzywydziałowych Indywidualnych Studiów Matematyczno-Przyrodniczych, Uniwersytet Warszawski

W ten sposób otrzymujemy

$$w(2k) - w(2k-1) =$$
$$= \frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} - \frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} >$$
$$> \frac{\sqrt{(2k+1)(2k-1)}}{2k+1}\cdot\frac{\sqrt{(2k-1)(2k-3)}}{2k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{\sqrt{5\cdot 3}}{5}\cdot\frac{\sqrt{3\cdot 1}}{3} -$$
$$- \frac{2k-1}{\sqrt{(2k+1)(2k-1)}}\cdot\frac{2k-3}{\sqrt{(2k-1)(2k-3)}}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{\sqrt{5\cdot 3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3\cdot 1}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2k+1}} - \frac{1}{\sqrt{2k+1}} = 0,$$

zatem w istocie $w(2k) > w(2k-1)$.

Jak widać, ten prosty model gry w mafię daje wyniki, które mogą być nieintuicyjne. Jako przykład rozważmy taką sytuację: jest nas czterech i chcemy zagrać z jednym mafiozo. Ma on szansę wygrania $w(3) = \frac{3}{8} = 0{,}375$. Jeśliby zaprosić dodatkowe pięć osób i grać w dziewiątkę, wciąż z jednym mafiozo, szanse wygrania mafii wzrosną do $w(8) = \frac{128}{315} \approx 0{,}406$.

Kolejny sposób na wyznaczenie liczby π

W sytuacjach praktycznych często cenniejszy jest przybliżony wzór, który ma prostą postać, niż dokładny, lecz skomplikowany. Rozważmy uśrednienie $w(c)$ dla sąsiedniej parzystej i nieparzystej wartości. Średnia geometryczna doskonale nadaje się do tego celu, gdyż zastosowanie jej znacznie uprości wynik:

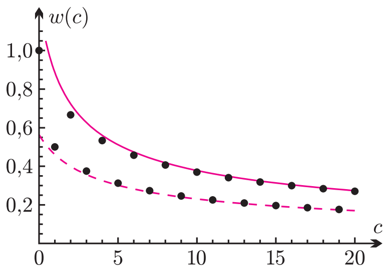
$$\sqrt{w(c-1)w(c)} = \sqrt{\frac{(c-1)!!}{c!!}\frac{c!!}{(c+1)!!}} = \frac{1}{\sqrt{c+1}}.$$

Cóż, wynik rzeczywiście prosty, jednak przez uśrednienie otrzymaliśmy funkcję monotoniczną, pozbawioną „ząbków”. W celu zbadania, na ile dodanie parzystego miastowego zwiększa szansę wygrania mafii, obliczmy stosunek

$$\frac{w(2k)}{w(2k-1)} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\Big/\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2\frac{1}{2k+1}.$$

Powyższe wyrażenie na pierwszy rzut oka nie wygląda zachęcająco. Czyżbyśmy dotarli do martwego punktu? Nie! Natrafiliśmy na wyrażenie, które jest zbieżne przy k dążącym do nieskończoności. Jest ono znane w matematyce jako wzór Wallisa:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2\frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{2}.$$



Wykres szans wygrania jednoosobowej mafii. Punkty reprezentują ścisłe wyniki $w(c)$, linie zaś są ich przybliżeniami – ciągła dla parzystej liczby mieszkańców c i przerywana dla nieparzystych c.

Czyli przy liczbie mieszkańców dążącej do nieskończoności dodanie parzystego miastowego zwiększa szanse wygrania mafii o czynnik $\pi/2$. Tym samym otrzymujemy sposób na doświadczalne wyznaczenie liczby π. Jeden z wielu, dość niepraktyczny, ale za to jakże oryginalny!

Co więcej, możemy pokusić się o wypisanie przybliżonych wzorów na szanse wygrania mafii w zależności od parzystości liczby mieszkańców. W tym celu przybliżymy odpowiedni stosunek przez jego granicę

$$w(2k-1) = \left(\frac{w(2k)}{w(2k-1)}\right)^{-1/2}\sqrt{w(2k-1)w(2k)} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2k+1}},$$
$$w(2k) = \left(\frac{w(2k)}{w(2k-1)}\right)^{1/2}\sqrt{w(2k-1)w(2k)} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

„Matematyczny model gry w mafię” – praca licencjacka na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, napisana pod opieką prof. Jacka Miękisza, dostępna na stronie http://migdal.wikidot.com/mafia

No dobrze, ale czy takie rozważania mają praktyczne zastosowanie? Prawdopodobnie można zrobić eksperyment psychologiczny, porównujący rzeczywiste wyniki z wyidealizowaną teorią. Na pewno zaś – napisać pracę licencjacką o grze w mafię.