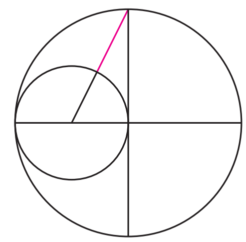
Siedmiokąta foremnego nie można skonstruować cyrklem i linijką,

a pięciokąt foremny można. Obok pokazana jest konstrukcja dziesięciokąta foremnego – kolorowy odcinek ma długość boku dziesięciokąta foremnego wpisanego w większy okrąg, a więc biorąc co drugi z wierzchołków takiego dziesięciokąta, otrzymamy pięciokąt foremny. Konstrukcja jest – jak widać – bardzo prosta. Ma tylko tę wadę, że nie wskazuje, jak konstruować inne wielokąty foremne.



Konstrukcja dziesięciokąta foremnego

Dziewiętnastoletni Carl Gauss (w 1796 roku) skonstruował pięciokąt w zupełnie inny sposób. Sposób ten ma z kolei tę wadę, że używa (prawda, że bardzo oszczędnie, ale jednak) liczb zespolonych. Natomiast ma tę zaletę, że stosując go, można skonstruować wszystkie n-kąty foremne, dla których taka konstrukcja może istnieć i dla których n jest liczbą pierwszą. W konsekwencji, posługując się tą konstrukcją, można skonstruować wszystkie wielokąty foremne, dla których konstrukcja cyrklem i linijką jest możliwa. Już Euklides udowodnił bowiem, że jeśli umiemy skonstruować p_i-kąt foremny dla (różnych) liczb pierwszych p_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, to umiemy skonstruować n-kąt foremny dla

$$n = 2^l \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m,$$

gdzie l jest dowolną liczbą naturalną.

Konstrukcje Gaussa stosują się do tzw. liczb pierwszych Fermata, czyli liczb pierwszych postaci $2^{2^k} + 1$. Czterdzieści lat po konstrukcji Gaussa Pierre Wanzel wykazał, że dla innych liczb pierwszych konstrukcja nie jest możliwa. Nie znaczy to, że wiemy w tej sprawie już wszystko, bo znamy tylko pięć liczb pierwszych Fermata: 3, 5, 17, 257, 65537, i nie wiemy, czy istnieją jeszcze inne.

Użycie liczb zespolonych w konstrukcji Gaussa jest oszczędne: pojawiają się jedynie *pierwiastki z jedności*. Pierwiastek n-tego stopnia z jedności to taka liczba z (w tym przypadku zespolona), która podniesiona do n-tej potęgi daje 1. Oznacza to (jak łatwo zauważyć, posługując się definicją mnożenia liczb zespolonych), że z obrócone o $(n-1)$-krotność kąta $10z$ wokół 0 staje się jedynką.

Zapewne nie od razu zobaczymy, że wszystkie pięć punktów na okręgu na rysunku 1 to pierwiastki piątego stopnia z jedności. Zauważmy jednak, że nie przez pomyłkę ponumerowane zostały „u góry" – faktycznie są to potęgi z.

Natomiast od razu widzimy, że są to wierzchołki pięciokąta foremnego. Korzyść z tego spostrzeżenia jest taka, że suma wektorów $\overrightarrow{0z^i}$ jest równa zeru – układ jest zrównoważony, żaden z wektorów nie ma przewagi. Zatem

$$(*) \qquad z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

A teraz sztuczka (a jakże, Gaussa): ponieważ $1 = z \cdot z^4 = z^2 \cdot z^3$, więc równanie $(*)$ możemy zapisać jako

$$0 = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right) + \left(\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2\right) + 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1.$$

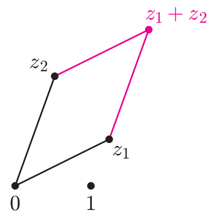
Jeśli więc oznaczymy $x := z + 1/z = z + z^4$, to otrzymamy równanie

$$x^2 + x - 1 = 0; \quad \text{zatem} \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

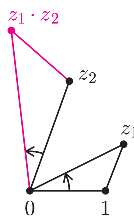
Odcinek o długości $(\sqrt{5} - 1)/2$ łatwo skonstruować cyrklem i linijką, a rysunek 2 pokazuje, jak zastosować to do znalezienia położenia z (i z^4) na okręgu jednostkowym, czyli jak skonstruować pięciokąt foremny. Ten sposób rozumowania daje się użyć w przypadku, gdy 5 zastąpimy dowolną z liczb pierwszych Fermata (oczywiście, im taka liczba będzie większa, tym rozumowanie dłuższe).

Dlaczego jednak nie da się go użyć np. do konstrukcji siedmiokąta foremnego? Spróbujmy.

Liczby zespolone to punkty płaszczyzny, na której obrano dwa punkty, mianując je zerem i jedynką;

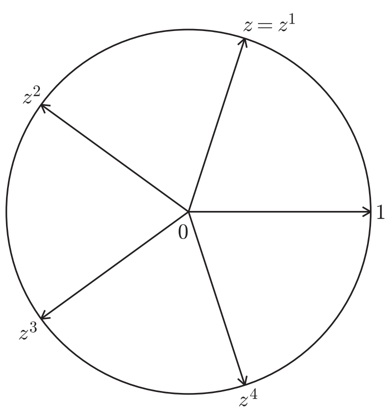


dodaje się te liczby tak, jak wektory zaczepione w 0,

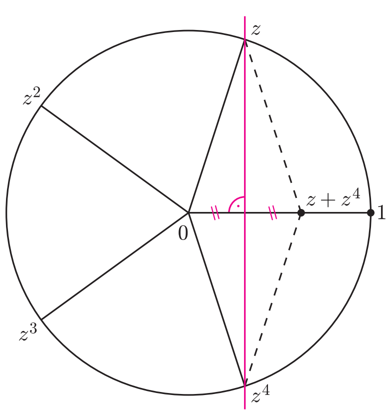


a mnoży, budując trójkąt $0z_2(z_1 \cdot z_2)$ podobny i mający tę samą orientację, co trójkąt $01z_1$; inaczej: trzeba odcinek $0z_2$ przedłużyć $|z_1|$ razy ($|z|$ to odległość z od 0) i obrócić o kąt $10z_1$.

Na prostej 01 te rachunki działają tak, jak na (zwykłej) osi liczbowej, czyli punkty tej prostej można traktować jak liczby rzeczywiste.



Rys. 1



Rys. 2

Równanie $z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$, gdzie z to pierwiastek siódmego stopnia z jedności, daje się zastąpić przez
$$\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+z^3+z^2+z+1=0.$$
Ponieważ $\left(z+\frac{1}{z}\right)^3=z^3+3z+3\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}=\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+3\left(z+\frac{1}{z}\right)$
i $\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=z^2+2+\frac{1}{z^2}=\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+2$, więc
$$\left(z+\frac{1}{z}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0,$$
czyli po podstawieniu $x:=z+\frac{1}{z}$ mamy
$$(**)\qquad x^3+x^2-2x-1=0.$$
Równanie to, jak każde równanie stopnia nieparzystego, ma pierwiastek rzeczywisty, ale nie jest jasne, czy warto go szukać, bo interesują nas tylko takie wartości, które można uzyskać z 1 przez stosowanie dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia oraz wyciągania pierwiastków kwadratowych, bo tylko takie działania dają się zrealizować za pomocą cyrkla i linijki.

Uzyskane równanie ma nawet trzy pierwiastki, bo dla $x=-2,-1,0,1,2$ przyjmuje odpowiednio wartości $-1,1,-1,-1,7$, czyli zmienia znak między -2 i -1, między -1 i 0 oraz między 1 i 2.

I faktycznie nie warto – wspomniany już Wanzel udowodnił, że:

jeśli długość odcinka da się opisać równaniem stopnia trzeciego o współczynnikach wymiernych, to odcinek taki da się skonstruować z odcinka o długości 1 *wtedy i tylko wtedy, gdy równanie to ma pierwiastek wymierny.*

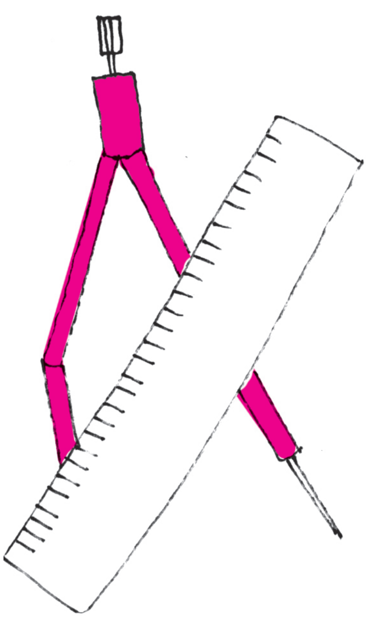
Nie oznacza to, że zadania konstrukcyjne opisywane przez równania stopnia trzeciego mogą nam dać jedynie odcinki o długościach wymiernych. Poszukiwanym przez nas rozwiązaniem może być niewymierny pierwiastek równania, ale równanie to musi mieć również pierwiastek wymierny (który może wcale nie pojawić się podczas konstrukcji), by konstrukcja była możliwa.

Myśl Wanzela możemy sobie przybliżyć, rozpatrując na początek sytuację, gdy długość rozpatrywanego odcinka jest liczbą postaci $l=p+q\sqrt{2}$, a równanie, które ją opisuje, to $x^3+ax^2+bx+c=0$, gdzie liczby p,q,a,b,c są wymierne (symbolicznie: należą do $\mathbb{Q}$). Podstawiając l do równania, otrzymujemy
$$p^3+3p^2q\sqrt{2}+6pq^2+q^3\sqrt{2}+a(p^2+2pq\sqrt{2}+2q^2)+b(p+q\sqrt{2})+c=0,$$
z czego wynika, że $3p^2q+q^3+2apq+bq=0$, bo są to współczynniki przy $\sqrt{2}$, a pozostałe liczby, łącznie z zerem, są wymierne. Ale skoro tak, to mamy również
$$p^3-3p^2q\sqrt{2}+6pq^2-q^3\sqrt{2}+a(p^2-2pq\sqrt{2}+2q^2)+b(p-q\sqrt{2})+c=0,$$
co oznacza, że również $p-q\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem rozpatrywanego równania.

Teraz przypomnijmy sobie wzory Viète'a: $-a$ jest sumą wszystkich pierwiastków równania. Oznaczając pozostały pierwiastek równania przez r (bo dwa już mamy), otrzymujemy $-a=p+q\sqrt{2}+p-q\sqrt{2}+r$, a więc $r=-a-2p$, zatem jest liczbą wymierną.

Uogólnienie I. Pierwiastek nie musi być z dwóch – może być z dowolnej liczby wymiernej m, o ile tylko $\sqrt{m}$ nie jest liczbą wymierną. Dowód przebiegnie bez zmian.

Uogólnienie II. Na ogół trzeba więcej razy wyciągać pierwiastek kwadratowy – robimy to po kolei (używając kolejno w konstrukcji cyrkla). Jeśli więc stwierdzimy, że dla liczb $p+q\sqrt{m}$, $p,q\in\mathbb{Q}$ musi istnieć pierwiastek wymierny, nazwijmy te liczby $\mathbb{Q}_1$ i rozważmy nasze równanie, przypuszczając, że ma pierwiastek wśród liczb postaci $p+q\sqrt{m_1}$, gdzie m_1 jest, a $\sqrt{m_1}$ nie jest liczbą z $\mathbb{Q}_1$. Wynik będzie taki sam jak poprzednio: otrzymamy najpierw, że istnieje pierwiastek w $\mathbb{Q}_1$, a (na mocy poprzedniego), że istnieje pierwiastek w $\mathbb{Q}$.



Operację tę będziemy powtarzali tyle razy, ile razy będziemy potrzebowali (rysując jakiś okrąg) wyciągać pierwiastki z dotychczas uzyskanych liczb.

Skoro tak, to siedmiokąta foremnego cyrklem i linijką skonstruować się nie da, bo równanie $(**)$ pierwiastka wymiernego nie ma (mógłby on być równy tylko 1 lub -1 – prawda?).

A co dalej? Polecam samodzielnie obmyślić dalszą drogę do twierdzenia Wanzela o niekonstruowalności innych wielokątów foremnych, poza tymi, które można skonstruować metodą Gaussa.

Marek KORDOS